

Sobre los horizontes de Cauchy compactos: un teorema de clasificación topológica y nulo-orbital



Autor:
Ignacio Bustamante Bianchi
Universidad de la República
ibustamante@cmat.edu.uy

Orientador:
Martín Reiris Ithurrealde
Universidad de la República
mreiris@cmat.edu.uy

Resumen

La ocurrencia de los horizontes de Cauchy, que delimitan la región de causalidad (y predictibilidad) del dato inicial, es uno de los fenómenos más intrigantes de la Relatividad General. Recientemente se ha demostrado que la presencia de un horizonte de Cauchy compacto y no degenerado en el vacío implica la existencia de una simetría especial del espacio-tiempo. Explotando la existencia de dicha simetría, en este trabajo mostramos que en un horizonte de Cauchy compacto y no degenerado se debe cumplir uno de los siguientes: (i) todos los generadores nulos son cerrados, o, (ii) solo dos generadores nulos son cerrados, y los otros son densos en 2-toros, o (iii) todos los generadores nulos son densos en 2-toros, o (iv) todos los generadores nulos son densos en el horizonte. Como consecuencia, si se cumple (i) el horizonte es una variedad de Seifert, si se cumple (ii) es un espacio lenticular, si se cumple (iii) es un fibrado por 2-toros sobre un círculo y si se cumple (iv) es un 3-toro. Finalmente, si existe un generador denso, probamos que la solución a la ecuación de Einstein en el vacío es el espacio de Kasner plano, cerrando una conjetura de Isenberg-Moncrief.

Índice general

0. Introducción	1
0.1. Motivación	1
0.2. Resultados	3
0.3. Organización de la tesis	4
I Preliminares	6
1. Hiperbolicidad Global y el problema de Cauchy en Relatividad General	7
1.1. Hipersuperficies de Cauchy	7
1.2. El problema de Cauchy en Relatividad General	8
1.3. Horizontes de Cauchy	11
2. Hipersuperficies nulas y horizontes de Cauchy	14
2.1. Campos nulos en hipersuperficies nulas	14
2.2. Hipersuperficies nulas totalmente geodésicas	15
2.3. Completitud geodésica y generadores nulos en hipersuperficies nulas	18
2.4. Horizontes de Cauchy compactos como horizontes de Killing	20
3. El espacio de Taub-NUT	23
3.1. Propiedades del espacio de Misner	24
3.2. Propiedades del espacio de Taub-NUT	29
3.3. El espacio de Taub-NUT y la conjetura de Censura Cósmica fuerte	33
II Clasificación de los horizontes de Cauchy compactos	35
4. Clasificación de 3-variedades Riemannianas compactas con simetrías continuas	36
4.1. Nociones básicas sobre de grupos de Lie y acciones	36
4.2. Resultados sobre acciones isométricas en variedades Riemannianas	39
4.3. Clasificación de 3-variedades Riemannianas con simetrías continuas	41

5. Clasificación de los horizontes de Cauchy cosmológicos	45
5.1. Simetrías nulas de horizontes de Cauchy cosmológicos	45
5.2. El espacio de Kasner	47
5.3. Caracterización de los espacio-tiempos cosmológicos con horizontes ergódicos . .	52

Apéndice **57**

A. Conceptos básicos de causalidad y demostraciones complementarias	57
A.1. Espacio de Minkowski	57
A.2. Variedades Lorentzianas, orientación temporal y relaciones de causalidad	58
A.3. Demostración de la Proposición 5.1.1	60

Capítulo 0

Introducción

0.1. Motivación

Un espacio-tiempo vacío es una 4-variedad M provista de una métrica Lorentziana \bar{g} que verifica,

$$\overline{\text{Ric}} = 0. \quad (0.1.1)$$

La ecuación global (0.1.1) puede formularse también como un problema de Cauchy, o problema de valores iniciales, sobre una 3-variedad Σ . Dada una métrica Riemanniana g sobre Σ (la “posición”) y un 2-tensor simétrico \mathcal{K} (la “velocidad”), el célebre teorema de Choquet Bruhat-Geroch [9] asegura que, si el *dato inicial* (g, \mathcal{K}) satisface las *ligaduras de energía y momento*,

$$\begin{aligned} R &= |\mathcal{K}|^2 - (\text{tr } \mathcal{K})^2, \\ \text{div } \mathcal{K} &= d(\text{tr } \mathcal{K}), \end{aligned} \quad (0.1.2)$$

entonces existe un único espacio-tiempo (M, \bar{g}) , solución a la *ecuación de Einstein en el vacío* (0.1.1), de forma que Σ es una *hipersuperficie de Cauchy* en M (es decir: toda curva causal inextensible en M intersecta a Σ , y lo hace exactamente una vez) y, además, (M, \bar{g}) es inextensible entre los espacio-tiempos que tienen a Σ como hipersuperficie de Cauchy. A posteriori, g y \mathcal{K} son la métrica y la curvatura extrínseca inducidas por el encaje $i : \Sigma \rightarrow M$ respectivamente. Los espacios que contienen hipersuperficies de Cauchy se denominan espacios *globalmente hiperbólicos*, y los inextensibles en esta clase se dicen *maximalmente globalmente hiperbólicos*. Por lo tanto, de acuerdo al teorema de Choquet Bruhat-Geroch, todo dato inicial evoluciona en un único espacio-tiempo maximalmente globalmente hiperbólico.

No obstante lo anterior, se conocen datos iniciales cuyos desarrollos maximalmente globalmente hiperbólicos pueden encajarse isométricamente en un espacio-tiempo más grande, que llamaremos *extensión*, que es solución a la ecuación de Einstein en el vacío pero que no tiene a la variedad inicial Σ como hipersuperficie de Cauchy, es decir, que contiene curvas causales inextensibles que no cortan a Σ . En este contexto el borde del desarrollo maximalmente globalmente hiperbólico del dato inicial es no vacío y se denomina *horizonte de Cauchy*.

Un espacio-tiempo que ejemplifica esta situación es la solución de Taub-NUT [29]. En este espacio-tiempo, vacío y altamente simétrico, con topología $M \sim \mathbb{R}_t \times \mathbb{S}^3$, el dato sobre la hipersuperficie $\Sigma = \{t = 0\} \sim \mathbb{S}^3$ tiene como desarrollo maximalmente globalmente hiperbólico a la llamada región de Taub, que está acotada por dos horizontes de Cauchy, $\{t = t_+\}$ y $\{t = t_-\}$, con topología \mathbb{S}^3 . Estos horizontes separan la región de Taub de regiones con curvas temporales cerradas (y que por lo tanto no intersectan a Σ). Lo que es remarcable de la región de Taub es que, como espacio maximalmente globalmente hiperbólico, admite múltiples extensiones no isométricas [10] (el espacio de Taub-NUT es una). Por lo tanto el espacio-tiempo más allá del horizonte de Cauchy no está determinado a partir del dato inicial sobre $\Sigma = \{t = 0\}$. En este sentido puede interpretarse que un horizonte de Cauchy marca el límite de predictibilidad del dato inicial.

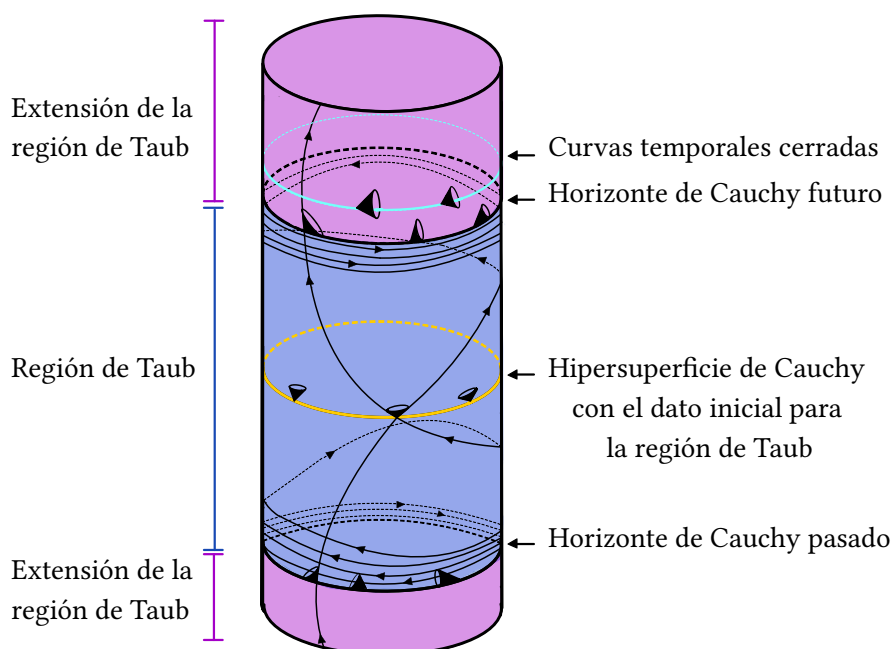


Figura 1: Esquema de una extensión de tipo NUT para la región de Taub a través de los horizontes de Cauchy. Las curvas negras representan las geodésicas nulas de este espacio.

Desde el punto de vista de su estructura, los horizontes de Cauchy compactos en el vacío son hipersuperficies nulas suaves [22, 26, 27], y están foliados por geodésicas nulas que se conocen como los *generadores nulos* del horizonte. Estos generadores pueden ser o bien geodésicamente completos o incompletos, y se dice que un horizonte de Cauchy es *no degenerado* si posee al menos un generador incompleto; en caso contrario, se dice que el horizonte es *degenerado*. Todos los ejemplos de horizontes de Cauchy compactos conocidos son no degenerados, y se conjetura que no existen horizontes de Cauchy compactos degenerados [33].

Recientemente se demostró que la presencia de un horizonte de Cauchy compacto y no degenerado en el vacío impone restricciones grandes en la clase de espacio-tiempos a considerar: estos horizontes solo pueden ocurrir como *horizontes de Killing*, es decir, debe existir un campo de Killing del espacio-tiempo tangente a los generadores nulos del horizonte [39, 38, 41] y se sabe que los espacio-tiempos que presentan campos de Killing no son genéricos [14, 5]. Esto va en concordancia con la conjetura de Censura Cósmica Fuerte propuesta por Penrose [36], que dice que genéricamente en el dato inicial, el desarrollo maximalmente globalmente hiperbólico es inextensible y, por lo tanto, genéricamente no se formarían horizontes de Cauchy.

Existen interesantes preguntas relacionadas a los horizontes de Cauchy compactos, tanto acerca de su topología como de la estructura de sus generadores nulos. Sobre su topología, trabajos de Rendall [42] muestran que todo horizonte de Cauchy compacto debe colapsar con diámetro acotado. Esto restringe las posibles estructuras del horizonte, y en particular implica que un horizonte de Cauchy compacto no puede admitir una métrica de curvatura constante negativa. Sobre la estructura de los generadores nulos, trabajos de Isenberg-Moncrief en la clase analítica de espacio-tiempos [32, 33, 19], muestran que los generadores deben ser o bien cerrados, o densos en 2-toros, o densos en el horizonte. Los métodos analíticos de los que depende su acercamiento fallan al existir un generador denso en el horizonte. Sobre este caso, al que denominan *ergódico*, Isenberg y Moncrief plantearon la siguiente conjetura [33].

Conjetura (Clasificación de los horizontes ergódicos). El único espacio-tiempo vacío analítico que admite un horizonte de Cauchy compacto, ergódico y no degenerado es un cociente adecuado del espacio de Kasner plano,

$$g = -dt^2 + t^2 dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (t, x, y, z) \in (0, \infty)_t \times \mathbb{R}_{x,y,z}^3 =: M. \quad (0.1.3)$$

Por cocientes adecuados nos referimos a cocientar este espacio por un retículo 3-dimensional en las direcciones espaciales (x, y, z) , de forma que para todo t_0, y_0, z_0 dado, la proyección $x \mapsto (t_0, x, y_0, z_0)$ es densa en la superficie de Cauchy $\{t = t_0\}$.

Esta tesis trata de una serie de resultados sobre la estructura de los generadores nulos y de la topología de los horizontes de Cauchy. Una descripción detallada se encuentra en la siguiente sección.

0.2. Resultados

El objetivo de este trabajo es obtener una clasificación de la estructura de los generadores nulos para horizontes de Cauchy compactos, suaves y no degenerados. El resultado principal es el siguiente.

Teorema. *Sea C un horizonte de Cauchy compacto y no degenerado en un espacio-tiempo 3+1-dimensional, vacío y suave. Entonces se cumple uno de los siguientes:*

- (I) *todos los generadores son cerrados, o,*
- (II) *solo hay dos generadores cerrados, y los otros generadores son densos en 2-toros, o,*
- (III) *todos los generadores son densos en 2-toros, o,*
- (IV) *todos los generadores son densos en el horizonte.*

Enfatizamos que esta clasificación de los generadores nulos es para espacio-tiempos suaves, refinando los resultados obtenidos en la clase analítica por Isenberg-Moncrief. Además obtenemos una distinción entre los posibles comportamientos del conjunto de generadores del horizonte. Se deduce de este resultado que, por ejemplo, si existen tres generadores cerrados deben ser todos cerrados, y en caso de que el horizonte sea ergódico, todo generador debe ser denso en \mathcal{C} .

Avanzando en dirección de una clasificación topológica de los horizontes de Cauchy compactos, obtenemos las siguientes restricciones para su topología.

Corolario. *Sea \mathcal{C} un horizonte de Cauchy compacto y no degenerado en un espacio-tiempo 3+1-dimensional, vacío y suave. Entonces, respectivamente a los casos (I)-(IV) en el teorema anterior, se tiene que,*

- (I) *si se cumple (I), \mathcal{C} es una variedad de Seifert,*
- (II) *si se cumple (II), \mathcal{C} es un espacio lenticular,*
- (III) *si se cumple (III), \mathcal{C} es un fibrado por toros \mathbb{T}^2 sobre \mathbb{S}^1 ,*
- (IV) *si se cumple (IV), \mathcal{C} es un 3-toro \mathbb{T}^3 .*

Para cada uno de estos casos existen ejemplos en la literatura. El horizonte de Taub-NUT es un ejemplo de (I), los horizontes de Gowdy son ejemplos de (II) y (III) [11], y a partir del espacio de Kasner plano obtenemos ejemplos de (IV).

Como subproducto, obtenemos una clasificación de los espacio-tiempos vacíos y suaves que presentan horizontes de Cauchy ergódicos y no degenerados, demostrando una versión refinada de la conjetura planteada por Isenberg-Moncrief.

Corolario. *Sea \mathcal{C} un horizonte de Cauchy ergódico, compacto y no degenerado en un espacio-tiempo (M, g) 3+1-dimensional, vacío y suave. Entonces (M, g) es un cociente de Kasner plano.*

0.3. Organización de la tesis

Este trabajo está dividido en dos partes: la Parte I corresponde al material preliminar, y la Parte II está destinada a la demostración de los resultados de clasificación discutidos previamente.

La organización de la Parte I es la siguiente:

En el Capítulo 1, introducimos las nociones relevantes a la hiperbolicidad global, como dominios de dependencia, hipersuperficies de Cauchy y espacios globalmente hiperbólicos. Conectamos estos conceptos con el problema de Cauchy en Relatividad General, necesario para entender el problema desde el punto de vista cosmológico, y concluimos con una breve discusión las propiedades que presentan los horizontes de Cauchy. En el Capítulo 2 enunciamos propiedades básicas de las hipersuperficies nulas, introducimos la segunda forma fundamental nula y recordamos definiciones básicas relacionadas a completitud geodésica en espacio-tiempos. Finalmente, discutimos resultados recientes acerca de las propiedades que presentan los horizontes de Cauchy compactos que serán necesarios para la segunda parte de la tesis. En el Capítulo 3 estudiamos el ejemplo de Taub-NUT, mostrando las propiedades interesantes que exhibe. Estas se usarán para ilustrar algunos comportamientos que sirven como base para generar intuición en el contexto cosmológico. Concluimos el material preliminar con una breve discusión de la Conjetura de Censura Cósmica Fuerte de Penrose.

La organización de la Parte II es la siguiente:

En el Capítulo 4, obtenemos una clasificación topológica para 3-variedades Riemannianas compactas que presentan un campo de Killing sin ceros, así como una clasificación para las órbitas de dicho campo. Finalmente, en el Capítulo 5 demostramos los resultados enunciados en la sección anterior. Para esto, veremos que el problema de clasificación desemboca naturalmente en el problema estudiado en el Capítulo 5.

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Hiperbolicidad Global y el problema de Cauchy en Relatividad General

En este capítulo enunciaremos resultados básicos sobre hiperbolicidad global y horizontes de Cauchy, y recordaremos algunas propiedades relevantes que presentan estos objetos. Referencias completas para estos temas son por ejemplo, [35, 17, 28].

Se asumirá cierta familiaridad con los conceptos básicos de geometría Lorentziana. Las notaciones y definiciones básicas que se utilicen pueden encontrarse en el Apéndice A.

1.1. Hipersuperficies de Cauchy

Asumiremos que (M, g) es un espacio-tiempo conexo, es decir, una variedad Lorentziana conexa y temporalmente orientada. Comenzamos recordando algunas nociones básicas sobre hipersuperficies y desarrollos de Cauchy.

Definición 1.1.1. Un subconjunto $S \subset M$ se dice *acronal* (respectivamente *acausal*) si toda curva temporal (respectivamente causal) inextendible en M intersecta S a lo sumo una vez.

Definición 1.1.2. Se dice que una hipersuperficie topológica $\Sigma \subset M$ es una *hipersuperficie de Cauchy* si toda curva temporal en M inextendible corta a Σ exactamente una vez. En particular, toda hipersuperficie de Cauchy es acronal. En caso de que exista una hipersuperficie de Cauchy en M , diremos que M es *globalmente hiperbólica*.

En Relatividad General, se distinguen tres tipos de hipersuperficies.

Definición 1.1.3. Sea Σ una hipersuperficie de una variedad Lorentziana (M, g) . Entonces decimos que Σ es:

1. *Espacial (o Riemanniana)* si la métrica inducida $g|_{T_x\Sigma}$ es definida positiva para todo $x \in \Sigma$.
2. *Temporal (o Lorentziana)*, si la métrica inducida $g|_{T_x\Sigma}$ tiene signatura $(-, +, \dots, +)$, para todo $x \in \Sigma$.

3. *Nula (o lumínica)*, si la métrica inducida $g|_{T_x\Sigma}$ es degenerada con signatura $(0, +, \dots, +)$ para todo $x \in \Sigma$.

Si M es globalmente hiperbólica, podemos asumir que existe una hipersuperficie de Cauchy espacial (y por lo tanto acausal, ver [Lema 14.42, [35]]) en M . Estas hipersuperficies caracterizan los espacios globalmente hiperbólicos, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1 (Geroch, Bernal-Sánchez). *Sea (M, g) un espacio-tiempo conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. (M, g) es globalmente hiperbólica.
2. (M, g) es isométrica a $(\mathbb{R} \times \Sigma, \bar{g})$, donde $\bar{g} = -\beta dt^2 + g_t$, con $\beta : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función suave positiva y g_t una familia de métricas Riemannianas en Σ que dependen suavemente de $t \in \mathbb{R}$. Además, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\{t\} \times \Sigma$ es una hipersuperficie de Cauchy suave espacial en M .

Demostración. Ver [Teo. 11, [15]] y [Teo. 1.1, [6]]. □

Una noción dual a la de hipersuperficie de Cauchy es la de desarrollo de Cauchy: dado un subconjunto S del espacio-tiempo M , el desarrollo de S será el conjunto de puntos que dependen causalmente (a futuro o pasado) de S , en el sentido que precisamos a continuación.

Definición 1.1.4. El *desarrollo de Cauchy* de un subconjunto S en un espacio-tiempo M es el conjunto $\mathcal{D}(S) \subset M$ definido por,

$$\mathcal{D}(S) = \{p \in M : \text{ toda curva causal inextensible que pasa por } p \text{ corta a } S\}.$$

El *desarrollo de Cauchy futuro* (o *dominio de dependencia futuro*) para un conjunto S se define,

$$\mathcal{D}^+(S) = \{p \in M : \text{ toda curva causal inextensible a pasado a través de } p \text{ intersecta a } S\}.$$

Similarmente se define el *dominio de dependencia pasado*,

$$\mathcal{D}^-(S) = \{p \in M : \text{ toda curva causal inextensible a futuro a través de } p \text{ intersecta a } S\}.$$

Observamos que si $\Sigma \subset M$ es una hipersuperficie de Cauchy, $\mathcal{D}(\Sigma) = M$.

1.2. El problema de Cauchy en Relatividad General

Fijada M una variedad $n + 1$ -dimensional, estamos interesados en las métricas \bar{g} en M que son soluciones a la ecuación de Einstein en el vacío con constante cosmológica nula, es decir,

$$\overline{\text{Ric}} - \frac{1}{2}R\bar{g} = 0. \tag{1.2.1}$$

Tomando trazas, observamos que esta ecuación se reduce a,

$$\overline{\text{Ric}} = 0. \quad (1.2.2)$$

Eligiendo un sistema de coordenadas $\{x^i\}$ en M , la expresión del tensor de Ricci en términos de los símbolos de Christoffel es

$$\overline{R}_{jk} = \partial_i \Gamma_{jk}^i - \partial_j \Gamma_{ik}^i + \Gamma_{ip}^i \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^i \Gamma_{ik}^p, \quad (1.2.3)$$

por lo que (1.2.2) forma un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para las componentes de la métrica. De esta expresión se deduce que el tensor de Ricci es lineal en las segundas derivadas de la métrica, y sus coeficientes son funciones racionales de las componentes de la métrica y además son cuadráticos en las primeras derivadas de la métrica. Esto muestra que la ecuación de Einstein en el vacío es un sistema de ecuaciones cuasi-lineal para \overline{g} .

Sin embargo, en esta discusión asumimos que la variedad M está dada. Este punto de vista puede parecer restrictivo, y es natural argumentar que la ecuación de Einstein debe ser interpretada como ecuaciones tanto para la variedad M como para la métrica \overline{g} . De hecho, la ecuación de Einstein también puede ser descrita como un problema de evolución. A continuación discutiremos brevemente este enfoque y su relación con los espacios maximalmente globalmente hiperbólicos. Los detalles de esta construcción pueden encontrarse en [46].

Sea (M, \overline{g}) una variedad Lorentziana de dimensión $n + 1$ globalmente hiperbólica. Por el Teorema 1.1.1, podemos foliar el espacio-tiempo por hipersuperficies de Cauchy espaciales que denotamos Σ_t , parametrizadas por t . La métrica del espacio-tiempo \overline{g} induce una métrica g (que depende de t pero evitamos escribir explícitamente para simplificar notación) en cada hoja Σ_t , dada por

$$g(X, Y) = \overline{g}(X, Y), \text{ donde } X, Y \in T\Sigma_t. \quad (1.2.4)$$

De esta forma, podemos interpretar que nos movemos de la hipersuperficie Σ_0 a Σ_t por las curvas integrales del campo ∂_t (o, dicho de otro modo, que Σ_0 evoluciona con el tiempo a Σ_t). La curvatura extrínseca \mathcal{K} de Σ_t resulta,

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\partial_t} g = -\frac{1}{2} \partial_t g. \quad (1.2.5)$$

En particular, \mathcal{K} hará las veces de derivada en dirección de t para la métrica g .

Una pregunta que surge naturalmente de este planteo es: dada una terna (Σ, g, \mathcal{K}) , donde (Σ, g) es una variedad Riemanniana y \mathcal{K} es un 2-tensor simétrico, ¿existe un espacio-tiempo (M, \overline{g}) globalmente hiperbólico y una hipersuperficie de Cauchy difeomorfa a Σ en M , de forma que la métrica inducida por \overline{g} en Σ coincida con g y \mathcal{K} sea su curvatura extrínseca?

En caso de que esto se cumpla, usando las ecuaciones de Gauss-Codazzi es sencillo mostrar que para la terna (Σ, g, \mathcal{K}) deben cumplirse las relaciones,

$$\begin{cases} R = |\mathcal{K}|^2 - (\text{tr } \mathcal{K})^2, \\ \text{div } \mathcal{K} = d(\text{tr } \mathcal{K}). \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Estas restricciones se conocen como restricciones ADM [2] o *restricciones Hamiltonianas*, dado que pueden obtenerse analizando el Lagrangiano de Einstein-Hilbert. La primera ecuación representa la restricción en la energía, y la segunda, la restricción en el momento. Esto nos permite obtener un candidato a dato inicial para nuestro problema de evolución, que definimos a continuación.

Definición 1.2.1. Un *dato inicial* es una terna (Σ, g, \mathcal{K}) donde (Σ, g) es una variedad Riemanniana y \mathcal{K} es un 2-tensor simétrico, tales que satisfacen las restricciones Hamiltonianas.

Puede mostrarse que dado un espacio-tiempo (M, \bar{g}) existe una buena elección de coordenadas (llamadas *coordenadas armónicas*), definidas por la ecuación $\square_{\bar{g}} x^i = 0$, donde $\square_{\bar{g}} := \nabla^* \nabla$ denota el operador D'Alembertiano, en las cuales el tensor de Ricci se expresa,

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \square_{\bar{g}} \bar{g}_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}(\bar{g}, \partial \bar{g}). \quad (1.2.7)$$

Puede probarse que si las restricciones Hamiltonianas se satisfacen inicialmente y elegimos coordenadas de forma que $\square_{\bar{g}} x^i = 0$ en Σ , estas condiciones se preservan a través de la evolución del sistema. La expresión (1.2.7) muestra que la ecuación de Einstein en el vacío es un sistema hiperbólico cuasi-lineal en estas coordenadas, por lo que el problema de Cauchy para $R_{\alpha\beta} = 0$ está bien puesto y la teoría estándar de ecuaciones en derivadas parciales nos asegura la existencia local de soluciones. Obtenemos así el siguiente teorema.

Teorema 1.2.1 (Choquet-Bruhat). *Dado un dato inicial (Σ, g, \mathcal{K}) existe un espacio-tiempo (M, \bar{g}) que satisface la ecuación de Einstein en el vacío y tal que Σ es una hipersuperficie de Cauchy espacial de M , con métrica inducida g y curvatura extrínseca \mathcal{K} .*

Demostración. Ver [Cap. 14, [43]]. □

Definición 1.2.2. Diremos que la variedad (M, \bar{g}) obtenida a partir del teorema anterior es un *desarrollo globalmente hiperbólico* del dato inicial. Notamos que el nombre coincide con la definición dada previamente, ya que la hipersuperficie Σ inicial es una hipersuperficie de Cauchy para su desarrollo globalmente hiperbólico.

Obtenemos de esta manera la existencia de una solución a la ecuación de Einstein, pero aún debemos ver qué podemos decir acerca de la unicidad de estos desarrollos. Es fácil ver que no hay unicidad para el problema de Cauchy, salvo que impongamos algunas restricciones adicionales. A continuación damos un ejemplo sencillo de este hecho.

Ejemplo 1.2.1. Consideramos los espacio-tiempos $(-\infty, 1) \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{(1, 0)\}$, equipadas con la métrica de Minkowski. Los tres espacio-tiempos son soluciones obvias a la ecuación de Einstein en el vacío, con dato inicial $(\{0\} \times \mathbb{R}^n, \delta, 0)$, donde δ es la métrica Euclídea en \mathbb{R}^n . Los primeros dos ejemplos son desarrollos globalmente hiperbólicos del dato inicial, pero el tercero no lo es. Es claro además que estas variedades no son isométricas dos a dos: por ejemplo, la segunda es geodésicamente completa mientras que las otras dos no lo son.

Si se quiere obtener unicidad, es necesario imponer condiciones adicionales sobre el desarrollo. Una condición natural es restringirse a la clase de desarrollos maximalmente globalmente hiperbólicos, es decir, aquellos espacios globalmente hiperbólicos inextendibles dentro de esta clase.

Definición 1.2.3. Un espacio-tiempo (M, \bar{g}) se dice *maximalmente globalmente hiperbólico* si es globalmente hiperbólico y no existe otro espacio-tiempo globalmente hiperbólico (N, \bar{h}) tal que (M, \bar{g}) es una subvariedad propia de (N, \bar{h}) .

Un argumento de lema de Zorn dentro en esta clase junto con la existencia local descrita anteriormente muestran que existe un espacio maximalmente globalmente hiperbólico para el dato de Cauchy. Estudiando la ecuación de Einstein se puede mostrar además que este desarrollo maximal es único salvo isometrías. Se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1.2.2 (Choquet-Bruhat-Geroch [9]). *Sea (Σ, g, \mathcal{K}) un dato inicial en el vacío. Entonces, salvo isometrías, existe un único desarrollo maximalmente globalmente hiperbólico (M, \bar{g}) de (Σ, g, \mathcal{K}) .*

Demostración. Ver [Sec. 14.4, [43]]. □

Estaremos interesados en una subclase de espacio-tiempos maximalmente globalmente hiperbólicos, que definimos a continuación.

Definición 1.2.4. Decimos que un espacio-tiempo vacío (M, \bar{g}) es *cosmológico* si es un espacio globalmente maximalmente hiperbólico con respecto a una hipersuperficie de Cauchy Σ compacta.

Terminamos esta sección mencionando dos propiedades importantes acerca de las simetrías de los datos iniciales. El siguiente resultado es una combinación de [Teo. 2.1.1, [40]], y [Teo. 3, [18]].

Teorema 1.2.3 (Extensión y restricción de simetrías). *Sea (M, \bar{g}) un desarrollo globalmente hiperbólico de un dato inicial (Σ, g, \mathcal{K}) compacto. Entonces si existe un campo de Killing X en (Σ, g) tal que $\mathcal{L}_X \mathcal{K} = 0$, el campo se extiende a un campo de Killing \bar{X} en (M, \bar{g}) . Recíprocamente, si Σ es una hipersuperficie de Cauchy compacta con métrica inducida $g := \bar{g}|_{\Sigma}$, y R es un subgrupo del grupo de isometrías de (M, \bar{g}) que actúa efectivamente y deja a Σ invariante, la acción de R en Σ deja el dato (Σ, g, \mathcal{K}) invariante.*

1.3. Horizontes de Cauchy

Dado un conjunto acronal S en un espacio-tiempo (M, g) , será útil tener criterios que establezcan si S es una hipersuperficie de Cauchy para M . La noción apropiada para esto es la de horizonte de Cauchy: este será la colección de todos los puntos que están en la clausura del dominio de dependencia futuro de S pero no preceden a ningún punto de este dominio. En otras

palabras, el horizonte de Cauchy futuro es el “borde futuro” del dominio de dependencia futuro de S , y análogamente definiremos el horizonte de Cauchy pasado.

Definición 1.3.1. Sea S un conjunto acronal en un espacio-tiempo (M, g) . El *horizonte de Cauchy futuro* de S es el conjunto

$$\mathcal{H}^+(S) = \overline{\mathcal{D}^+(S)} \setminus \mathcal{I}^-(\mathcal{D}^+(S)) = \{p \in \overline{\mathcal{D}^+(S)} : \mathcal{I}^+(p) \text{ no interseca } \mathcal{D}^+(S)\},$$

donde denotamos el pasado y futuro cronológico de un conjunto B por $\mathcal{I}^-(B)$ e $\mathcal{I}^+(B)$ respectivamente. Dualmente se define el *horizonte de Cauchy pasado* $\mathcal{H}^-(S)$,

$$\mathcal{H}^-(S) = \overline{\mathcal{D}^-(S)} \setminus \mathcal{I}^+(\mathcal{D}^-(S)) = \{p \in \overline{\mathcal{D}^-(S)} : \mathcal{I}^-(p) \text{ no interseca } \mathcal{D}^-(S)\}.$$

El *horizonte de Cauchy* de S es la unión de estos horizontes,

$$\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}^+(S) \cup \mathcal{H}^-(S).$$

Trabajaremos con $\mathcal{H}^+(S)$, y los resultados se seguirán para $\mathcal{H}^-(S)$ revirtiendo orientación temporal. Para aliviar notación denotaremos a los horizontes de Cauchy por \mathcal{C} en vez de $\mathcal{H}^+(S)$ cuando no usemos explícitamente al conjunto S .

En términos relativistas, $\mathcal{H}^+(S)$ marcará el límite de la región del espacio-tiempo que es controlada por S y en particular, si $\mathcal{H}^+(S)$ es no vacío, el futuro de S no podrá ser predicho a partir de la información dada sobre S . Discutimos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 1.3.1. En la Figura 1.1, el horizonte futuro está dado por las curvas α y β .

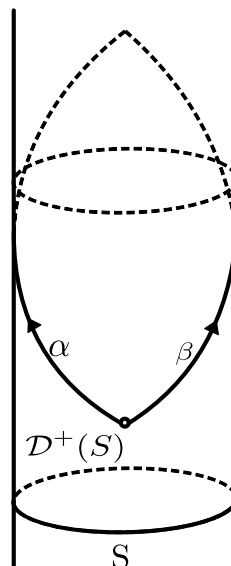


Figura 1.1: Eliminando el punto marcado por un círculo, el dominio de dependencia futuro de S será la unión de S y la región abierta delimitada por S , α y β . Las direcciones horizontales se asumen espaciales, y la dirección vertical se asume temporal.

Ejemplo 1.3.2. En el espacio de Minkowski, las hipersuperficies $S := \{t = cte\}$ cumplen $\mathcal{H}(S) = \emptyset$.

Ejemplo 1.3.3. Supongamos que borramos una semirrecta del espacio de Minkowski, como se describe en la siguiente figura.

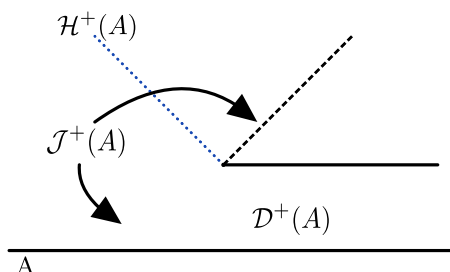


Figura 1.2: Dominio de dependencia futuro, futuro causal y horizonte de Cauchy del conjunto A en el espacio de Minkowski. La línea negra de la que parten las líneas punteadas ha sido eliminada. El horizonte está denotado por la línea punteada azul.

Observamos que en este caso el horizonte de Cauchy futuro separa el dominio de dependencia futuro de A del resto del futuro causal de A .

Proposición 1.3.1. Sea S una hipersuperficie cerrada y acausal en un espacio-tiempo (M, g) . Entonces,

1. $\mathcal{H}^\pm(S) = \mathcal{I}^\pm(S) \cap \partial\mathcal{D}^\pm(S) = \overline{\mathcal{D}^\pm(S)} - \mathcal{D}^\pm(S)$. En particular, $\mathcal{H}^+(S)$ y S son disjuntos.
2. $\mathcal{H}^\pm(S)$ es una hipersuperficie topológica acronal si no es vacío.
3. Empezando en cada punto de $\mathcal{H}^+(S)$ (resp. $\mathcal{H}^-(S)$), existe una geodésica nula inextensible a pasado (futuro) sin puntos conjugados que está contenida enteramente en $\mathcal{H}^+(S)$ (resp. $\mathcal{H}^-(S)$). Diremos que estas geodésicas son los generadores nulos del horizonte.

Demostración. Ver [Lema 14.53, [35]]. □

En particular, la proposición anterior implica que una hipersuperficie cerrada y acausal S en un espacio-tiempo (M, g) es una superficie de Cauchy para M si y solamente si $\mathcal{H}(S) = \emptyset$. Los detalles de este argumento pueden encontrarse en [Cor 14.54, [35]].

Finalmente, observamos que los horizontes de Cauchy suaves son hipersuperficies nulas. Este resultado es consecuencia de [Teo. 3.5, [4]].

Proposición 1.3.2. Sea \mathcal{C} un horizonte de Cauchy en un espacio-tiempo (M, g) . Entonces, si \mathcal{C} es diferenciable en un punto $p \in \mathcal{C}$, $T_p\mathcal{C}$ es un hiperplano nulo. En particular, si \mathcal{C} es suave, \mathcal{C} es una hipersuperficie nula.

Capítulo 2

Hipersuperficies nulas y horizontes de Cauchy

En este capítulo recordaremos las nociones y propiedades de las hipersuperficies nulas que son relevantes para nuestro tratamiento de los horizontes de Cauchy compactos. Referencias para los temas que desarrollaremos son [3, 21, 12, 13].

2.1. Campos nulos en hipersuperficies nulas

Sea (M, g) un espacio-tiempo de dimensión $n + 1 \geq 3$ y $\mathcal{H} \subset M$ una hipersuperficie nula suave. Como la restricción de la métrica g a $T\mathcal{H}$ es degenerada con signatura $(0, +, \dots, +)$, dado $p \in \mathcal{H}$ existe un único subespacio unidimensional $V_p \subset T_p\mathcal{H}$, al que llamaremos *línea nula en p* , tal que,

$$g(V, X) = 0 \text{ para todo } V \in V_p \text{ y } X \in T_p\mathcal{H}.$$

Denotamos por \mathcal{V} al fibrado de líneas nulas en \mathcal{H} , $\mathcal{V} := \cup_{p \in \mathcal{H}} V_p$. Observamos que este fibrado es orientable: fijado T un vector temporal unitario dirigido a futuro en M , definimos una sección K de \mathcal{V} declarando que $g(K(p), T(p)) = -1$ para todo $p \in \mathcal{H}$. Se sigue que K es una sección suave, nula y dirigida a futuro del fibrado \mathcal{V} , por lo que define una orientación para \mathcal{V} .

La construcción anterior muestra que existe un campo nulo $p \mapsto K(p) \in V_p \subset T_p\mathcal{H}$ suave, dirigido a futuro y sin ceros, único en \mathcal{H} excepto por un factor de escala. El campo K es ortogonal a la hipersuperficie \mathcal{H} , y se cumple

$$K(p)^\perp = T_p\mathcal{H}, \tag{2.1.1}$$

para todo $p \in \mathcal{H}$. De la restricción en la signatura se sigue que los vectores tangentes a \mathcal{H} en p que no son paralelos a $K(p)$ deben ser espaciales.

2.2. Hipersuperficies nulas totalmente geodésicas

Si K es un campo nulo sin ceros en una hipersuperficie \mathcal{H} , la propiedad (2.1.1) nos asegura que K es ortogonal a \mathcal{H} . Esta observación nos permitirá introducir un mapa de Weingarten nulo y una segunda forma fundamental nula en \mathcal{H} con respecto a K de una forma reminiscente al procedimiento estándar en variedades Riemannianas. Sin embargo, como el campo normal a \mathcal{H} es nulo, no podremos distinguir entre dos campos que difieren por un múltiplo de K . Por este motivo será conveniente definir una clase de equivalencia en los planos tangentes a \mathcal{H} .

Definición 2.2.1. Sean $p \in \mathcal{H}$ y X, X' vectores en $T_p\mathcal{H}$. Diremos que

$$X' = X \quad \text{mód } K \text{ si y solo si } X' - X = \lambda K(p),$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotaremos la clase de equivalencia de un vector X por \bar{X} .

Para estudiar las propiedades de esta relación, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.2.1. *Sea \mathcal{H} una hipersuperficie nula suave, y sea K un campo vectorial nulo en \mathcal{H} que no se anula en ningún punto, dirigido a futuro. Entonces las curvas integrales de K , llamadas generadores nulos de \mathcal{H} , son geodésicas nulas (bajo reparametrización).*

Demostración. Basta probar que $\nabla_K K = \lambda K$. Esto es equivalente a ver que para todo $p \in \mathcal{H}$, $\nabla_K K \perp T_p\mathcal{H}$, es decir, $g(\nabla_K K, X) = 0$ para todo $X \in T_p\mathcal{H}$. Fijamos $X \in T_p\mathcal{H}$ y lo extendemos a un entorno de p haciéndolo invariante bajo el flujo generado por K ,

$$[K, X] = \nabla_K X - \nabla_X K = 0. \quad (2.2.1)$$

El campo X sigue siendo tangente a \mathcal{H} , por lo que obedece $g(K, X) = 0$. Diferenciando esta igualdad,

$$0 = K(g(K, X)) = g(\nabla_K K, X) + g(K, \nabla_K X), \quad (2.2.2)$$

y entonces,

$$g(\nabla_K K, X) = -g(K, \nabla_K X) = -g(K, \nabla_X K) = -\frac{1}{2}X(g(K, K)) = 0. \quad (2.2.3)$$

□

Proposición 2.2.2. *Sean $X, Y \in T_p\mathcal{H}$. Si $X' = X \quad \text{mód } K$ e $Y' = Y \quad \text{mód } K$,*

1. $g(X', Y') = g(X, Y)$, y
2. $g(\nabla_{X'} K, Y') = g(\nabla_X K, Y)$.

Demostración. Para la primera afirmación, observamos que

$$g(X + \lambda K, Y + \mu K) = g(X, Y) + \mu g(X, K) + \lambda g(K, Y + \mu K). \quad (2.2.4)$$

Los últimos dos términos se anulan inmediatamente, dado que K es normal a $T_p\mathcal{H}$.

Para probar la segunda afirmación, usando el Lema 2.2.1 se tiene que $\nabla_K K = fK$ para alguna función f . Entonces,

$$g(\nabla_{X+\lambda K} K, Y + \mu K) = g(\nabla_X K, Y) + g(\nabla_X K, \mu K) + \lambda g(\nabla_K K, Y + \mu K). \quad (2.2.5)$$

Nuevamente, el tercer término se anula inmediatamente usando que fK es normal a $T_p\mathcal{H}$. Finalmente, como X es tangente a \mathcal{H} ,

$$g(\nabla_X K, K) = \frac{1}{2} X(g(K, K)) = 0. \quad (2.2.6)$$

□

Observamos entonces que para estudiar algunos objetos geométricos la información de lo que ocurre en la dirección de K es irrelevante. Por esta razón es útil trabajar con el *fibrado tangente módulo K* ,

$$T_p\mathcal{H}/K := \{\bar{X} : X \in T_p\mathcal{H}\}, \text{ y } T\mathcal{H}/K := \bigcup_{p \in \mathcal{H}} T_p\mathcal{H}/K.$$

Cuando el espacio-tiempo tiene dimensión $n + 1$, $T\mathcal{H}/K$ es un fibrado vectorial de rango $n - 1$ sobre \mathcal{H} y además no depende de la elección particular del campo K . Podemos equiparlo de una métrica natural definida positiva h , inducida por g : para cada $p \in \mathcal{H}$, definimos $h : T_p\mathcal{H}/K \times T_p\mathcal{H}/K \rightarrow \mathbb{R}$ como,

$$h(\bar{X}, \bar{Y}) := g(X, Y). \quad (2.2.7)$$

La propiedad 1 de la Proposición 2.2.2 muestra que este mapa está bien definido.

Definición 2.2.2. El *mapa de Weingarten nulo* $b = b_K$ de \mathcal{H} con respecto a K en $p \in \mathcal{H}$ es el mapa lineal $b : T_p\mathcal{H}/K \rightarrow T_p\mathcal{H}/K$ definido por

$$b(\bar{X}) = \overline{\nabla_X K}. \quad (2.2.8)$$

Como $g(\nabla_X K, K) = 0$, observamos que efectivamente $\nabla_X K \in T_p\mathcal{H}$ y la Proposición 2.2.2 asegura que b está bien definido. Ahora, para cualquier otro campo nulo \tilde{K} podemos escribir

$$\tilde{K} = fK,$$

para alguna función $f \in C^\infty(\mathcal{H})$, y entonces se cumple

$$\nabla_X \tilde{K} = f \nabla_X K \quad \text{mód } K. \quad (2.2.9)$$

Esto muestra que,

$$b_{fK} = fb_K. \quad (2.2.10)$$

Se sigue que el mapa de Weingarten nulo de \mathcal{H} es único salvo por un factor de escala f , con f positiva una vez se elige una orientación temporal para K . Probamos ahora una propiedad importante de este mapa.

Proposición 2.2.3. *El mapa de Weingarten nulo b es autoadjunto respecto a h ,*

$$h(b(\bar{X}), \bar{Y}) = h(\bar{X}, b(\bar{Y})). \quad (2.2.11)$$

Demostración. Efectivamente, se tiene que

$$h(b(\bar{X}), \bar{Y}) = g(\nabla_X K, Y) = X(g(K, Y)) - g(K, \nabla_X Y). \quad (2.2.12)$$

El primer término de la derecha es nulo pues K es normal a \mathcal{H} . Como la conexión no tiene torsión,

$$g(K, \nabla_X Y) = g(K, \nabla_Y X + [X, Y]) = g(K, \nabla_Y X) = Y(g(K, X)) - g(\nabla_Y K, X), \quad (2.2.13)$$

donde usamos que $[X, Y] \in T\mathcal{H}$. Como el primer término de la derecha se anula, obtenemos

$$g(K, \nabla_X Y) = -h(\bar{X}, b(\bar{Y})). \quad (2.2.14)$$

□

Usando el mapa de Weingarten nulo, podemos definir la segunda forma fundamental nula de \mathcal{H} .

Definición 2.2.3. La segunda forma fundamental nula $B = B_K$ de \mathcal{H} respecto a K es la forma bilineal asociada a b via h , es decir, para cada $p \in \mathcal{H}$, $B : T_p\mathcal{H}/K \times T_p\mathcal{H}/K \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por,

$$B(\bar{X}, \bar{Y}) := h(b(\bar{X}), \bar{Y}) = g(\nabla_X K, Y). \quad (2.2.15)$$

Como b es autoadjunta se sigue que B es simétrica,

$$B(\bar{X}, \bar{Y}) = B(\bar{Y}, \bar{X}). \quad (2.2.16)$$

Recordamos que una subvariedad N es *totalmente geodésica* si toda geodésica inicialmente tangente a N permanece en N para todo tiempo donde esté definida. De una forma similar a la segunda forma fundamental en superficies, B mide cuánto se desvían las geodésicas de una hipersuperficie nula \mathcal{H} .

Teorema 2.2.4 (Teo. 30, [21]). *Una hipersuperficie nula \mathcal{H} es totalmente geodésica si y solamente si $B \equiv 0$.*

Demostración. Sean X e Y campos vectoriales tangentes a \mathcal{H} . Por (2.1.1), $\nabla_X Y$ será tangente a \mathcal{H} si y solamente si $g(\nabla_X Y, K) = 0$. Ahora,

$$g(\nabla_X Y, K) = X(g(Y, K)) - g(Y, \nabla_X K) = -g(Y, \nabla_X K) = -B(\bar{X}, \bar{Y}), \quad (2.2.17)$$

lo que muestra que ∇ define una conexión en \mathcal{H} de manera natural cuando B se anula.

Denotemos por $\tilde{\nabla}$ a esta conexión, y sea γ una geodésica para $\tilde{\nabla}$. Entonces γ será una curva que permanece en \mathcal{H} y tal que $\tilde{\nabla}_{\gamma'} \gamma'$ es proporcional a γ' . Como $\nabla_{\gamma'} \gamma' = \tilde{\nabla}_{\gamma'} \gamma'$, el vector $\nabla_{\gamma'} \gamma'$ también será proporcional a γ' , y por lo tanto γ será una geodésica para ∇ . La unicidad del problema de Cauchy para la ecuación geodésica completa la prueba. □

2.3. Completitud geodésica y generadores nulos en hipersuperficies nulas

A continuación mencionaremos algunas propiedades de las geodésicas y campos nulos en una hipersuperficie nula. Para esto, recordamos algunas nociones.

Definición 2.3.1. Sea (M, g) un espacio-tiempo. Diremos que una geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ es *completa* si el intervalo maximal de definición de su parámetro afín es $I = \mathbb{R}$. En caso contrario, diremos que es *incompleta*. Diremos que una geodésica dirigida a futuro γ es *incompleta a futuro* si el intervalo maximal de definición $I = (a, b)$ de su parámetro afín cumple $b < +\infty$ y que es *incompleta a pasado* si $-\infty < a$. Diremos que M es *geodésicamente completa* si todas las geodésicas en M pueden definirse para todos los valores del parámetro afín. Esto es equivalente a que, para todo $p \in M$, el dominio del mapa exponencial sea $T_p M$.

Cabe mencionar que, en contraste con el caso Riemanniano, el flujo geodésico en una variedad Lorentziana compacta no es necesariamente completo. De hecho, es sencillo construir ejemplos de variedades Lorentzianas compactas no geodésicamente completas [28, 3].

Definición 2.3.2. Sea (M, g) un espacio-tiempo y $\gamma : I \rightarrow M$ una geodésica inextendible no constante (parametrizada afínmente, es decir, $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$). Decimos que γ es *cerrada* si existen $\lambda > 0$ y $a, b \in I$ con $a < b$ tales que,

$$\gamma(a) = \gamma(b) \text{ y } \gamma'(b) = \lambda \gamma'(a). \quad (2.3.1)$$

Si $\lambda = 1$, diremos que γ es *periódica*.

Notamos que si γ es periódica, debe existir un mínimo $T > 0$ tal que $\gamma(t) = \gamma(t + T)$ para todo t . Esto implica que γ es completa. Mostramos ahora una caracterización de la periodicidad.

Proposición 2.3.1. Sea γ una geodésica cerrada de (M, g) .

(I) Si γ no es una geodésica nula, entonces es periódica.

(II) γ es completa si y solo si es periódica.

Demostración. Comenzamos probando (I). Observamos que si γ es cerrada, $g(\gamma'(b), \gamma'(b)) = \lambda g(\gamma'(a), \gamma'(a))$ y como no es lumínica, $g(\gamma', \gamma') \neq 0$, lo que implica que $\lambda = 1$. Veamos (II). Si γ es periódica, es completa. Ahora, si $\lambda > 1$, entonces veremos que es incompleta a futuro (análogamente se prueba que para $\lambda < 1$ es incompleta a pasado). Definimos $b_1 := b$ y $T := b - a$. Como $\gamma'(b_1) = \lambda \gamma'(a)$, de b_1 hasta $b_2 := b_1 + T/\lambda$, la geodésica γ es una reparametrización de $\gamma|_{[a, b]}$, de forma que $\gamma'(b_2) = \lambda \gamma'(b_1) = \lambda^2 \gamma'(a)$. Razonando inductivamente, la secuencia $b_{i+1} = b_1 + T/\lambda^i$ satisface,

$$\gamma'(b_i) = \lambda^i \gamma'(a). \quad (2.3.2)$$

En cada vuelta completa observamos que la distancia afín se vuelve más corta. En particular, γ no puede extenderse más allá de

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} b_i = b + \frac{T}{\lambda - 1} < +\infty. \quad (2.3.3)$$

□

Discutimos brevemente la relación entre el campo nulo K y la completitud de las geodésicas nulas en una hipersuperficie compacta nula \mathcal{H} . Dado K un campo nulo sin ceros en \mathcal{H} , se tiene que

$$\nabla_K K = \lambda K, \quad (2.3.4)$$

donde $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave. Fijando $p \in \mathcal{H}$, podemos reescalar K de forma que en un entorno $p \in U_p$ las líneas integrales del campo K , definidas por

$$\frac{d\varphi}{dz}(z) = K(\varphi(z)), \quad \varphi(0) = q, \quad (2.3.5)$$

sean geodésicas nulas parametrizadas afinmente. Este campo K no es único, dado que no hay una elección canónica del parámetro afín para los generadores, pero puede fijarse prescribiendo el campo en cada punto de una subvariedad transversal a los generadores nulos (ver [Sec. 4, [21]] y [Sec. B, [33]]).

Sin embargo, no siempre podemos reescalar K de forma que todas sus líneas integrales sean los generadores nulos de \mathcal{H} parametrizados afinmente: esto se debe a que en caso de poder realizar este procedimiento, la compacidad de \mathcal{H} asegurará que el flujo de K es completo y por lo tanto todos los generadores nulos de \mathcal{H} serán completos.

Esta observación nos lleva a una última definición en esta sección, que contiene información geométrica de \mathcal{H} .

Definición 2.3.3. Decimos que una hipersuperficie nula compacta \mathcal{H} es *no degenerada* si existe al menos un generador nulo incompleto en \mathcal{H} .

Observación 2.3.2. Supongamos que existe un campo K definido globalmente en \mathcal{H} tal que

$$\nabla_K K = -cK, \quad (2.3.6)$$

donde $c > 0$ es una constante. Reescalando K como $\frac{1}{c}K$ podemos asumir sin pérdida de generalidad que $c = 1$. Entonces es sencillo ver que la longitud afín a futuro de los generadores nulos comenzando en $\gamma(0) = p$ con velocidad $\gamma'(0) = K(p)$ será uno: si $\gamma(s)$ es el generador nulo parametrizado afinmente tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = K(p)$, debe ser $\gamma'(s) = f(s)K(\gamma(s))$. Ahora,

$$0 = \nabla_{\gamma'} \gamma' = f'(s)K(\gamma(s)) - f^2(s)K(\gamma(s)) = (f'(s) - f^2(s))K(\gamma(s)), \quad (2.3.7)$$

y por lo tanto $f'(s) - f^2(s) = 0$. Por otro lado, como $\gamma(0) = f(0)K(\gamma(0))$, debe ser $f(0) = 1$, de donde se sigue que $f(s) = 1/(1 - s)$. Se deduce que en este caso todo generador nulo será incompleto.

2.4. Horizontes de Cauchy compactos como horizontes de Killing

Entre las hipersuperficies nulas se distinguen particularmente los horizontes de Killing: la característica que los define es que su campo normal proviene de una simetría del espacio-tiempo.

Definición 2.4.1. Una hipersuperficie nula suave \mathcal{H} se dice un *horizonte de Killing* si existe un campo de Killing ξ sin ceros definido en un entorno abierto U de \mathcal{H} de forma que ξ es ortogonal (o *normal*) a \mathcal{H} .

Observamos que el campo de Killing ξ no tiene por qué ser un campo normal geodésico para \mathcal{H} : si $\nabla_{\xi}\xi = 0$, diremos que \mathcal{H} es un *horizonte extremal*. Por otro lado, si \mathcal{H} es un horizonte de Killing,

$$\nabla_{\xi}\xi = \kappa\xi, \quad (2.4.1)$$

para alguna función suave $\kappa : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$. Bajo estas hipótesis κ será una constante, a la que denominaremos *gravedad superficial* de \mathcal{H} (en analogía con la gravedad superficial de los agujeros negros, ver [Sec. 12.5, [46]]). Si $\kappa = \pm 1$, diremos que el horizonte tiene gravedad superficial *normalizada*.

Notando que todos los ejemplos conocidos de espacio-tiempos cosmológicos que presentan horizontes de Cauchy compactos tienen simetrías adicionales, en 1983 Isenberg y Moncrief formularon la siguiente conjetura[32].

Conjetura 2.4.1 (Isenberg-Moncrief). Todo horizonte de Cauchy compacto y no degenerado en un espacio-tiempo vacío suave 3+1-dimensional es un horizonte de Killing.

Los trabajos fundacionales de Isenberg y Moncrief ocurren bajo la hipótesis extra de analiticidad del espacio-tiempo, a su vez que restringen el comportamiento de los generadores del horizonte. Los resultados obtenidos en [32, 19, 18, 33] entre el 1983 y el 2020 pueden resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1 (Isenberg-Moncrief). *Sea \mathcal{C} un horizonte de Cauchy compacto, no degenerado en un espacio-tiempo analítico 3+1-dimensional (M, g) . Entonces los generadores del horizonte son cerrados, densos en 2-toros o densos en \mathcal{C} . En caso de que ningún generador sea denso en \mathcal{C} , \mathcal{C} es un horizonte de Killing. Además, si \mathcal{H} es una hipersuperficie compacta nula en un espacio-tiempo analítico no degenerada y todos sus generadores son cerrados, \mathcal{H} es necesariamente un horizonte de Cauchy.*

Si bien la hipótesis de analiticidad resulta restrictiva, varias de estas ideas se han utilizado recientemente para demostrar la Conjetura 2.4.1 en su total generalidad. Discutimos brevemente los resultados que son necesarios para su demostración, pues nos serán de utilidad más adelante.

De aquí al final del capítulo, (M, g) indicará un espacio-tiempo vacío, suave y 3+1-dimensional, de manera que su región globalmente hiperbólica \mathcal{H} está acotada por un horizonte de Cauchy

compacto \mathcal{C} , que asumiremos futuro (el caso pasado se obtiene revirtiendo orientación temporal). Asumiremos que el horizonte \mathcal{C} divide a M en dos componentes conexas,

$$M \setminus \mathcal{C} = \mathcal{I} \sqcup \mathcal{H}.$$

Denotaremos por $\Sigma \subset \mathcal{H}$ a una hipersuperficie de Cauchy en \mathcal{H} , es decir, $\mathcal{D}(\Sigma) = \mathcal{H}$. Como fue observado en la Sección 1.3, los horizontes de Cauchy no son necesariamente suaves. Sin embargo, los horizontes de Cauchy compactos sí lo son. El teorema que enunciamos a continuación fue probado por Hawking [17] bajo la hipótesis adicional de que el horizonte sea suave. Esta condición fue removida en trabajos independientes de Larsson [23] y Minguzzi [26, 27], donde se obtiene como parte de la tesis.

Teorema 2.4.2 (Hawking, Larsson, Minguzzi). *Sea \mathcal{C} un horizonte de Cauchy compacto futuro (pasado) en un espacio-tiempo $n+1$ -dimensional (M, g) , tal que se cumple la condición de energía nula,*

$$\text{Ric}(L, L) \geq 0,$$

para todo vector nulo L en M . Entonces,

1. todo generador nulo de \mathcal{C} es completo a pasado (futuro),
2. \mathcal{C} es una hipersuperficie suave y totalmente geodésica en M .

En el vacío la condición de energía nula se cumple trivialmente. Usando este resultado, Petersen y Rácz [Teo. 1.2, [39]] mostraron lo siguiente.

Teorema 2.4.3 (Petersen-Rácz). *Sea (M, g) un espacio-tiempo $n+1$ -dimensional, vacío y \mathcal{C} un horizonte de Cauchy en M , tal que existe un campo suave, nulo y que no se anula en ningún punto K en \mathcal{C} y cumple,*

$$\nabla_K K = -K. \tag{2.4.2}$$

Entonces existe un campo de Killing suave y no trivial \tilde{K} en $\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D}(\Sigma)$, tal que $\tilde{K}|_{\mathcal{C}} = K$ es nulo en \mathcal{C} y espacial en $\mathcal{D}(\Sigma)$, y toda extensión suave de \tilde{K} a través de \mathcal{C} al complemento de $\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D}(\Sigma)$ es temporal cerca de \mathcal{C} .

Si bien esto no asegura que el horizonte de Cauchy sea un horizonte de Killing, un resultado del 2019 por Petersen [Teo. 1.4, [38]] muestra que efectivamente todo horizonte de Cauchy que admita un campo nulo K con la propiedad (2.4.2) es un horizonte este tipo. Sin embargo, notamos que en general la extensión del campo al complemento de la región globalmente hiperbólica está garantizada únicamente cerca del horizonte. Enunciamos este teorema a continuación.

Teorema 2.4.4 (Petersen). *El campo de Killing \tilde{K} del Teorema 2.4.3 puede extenderse a un abierto $U \subset M$ del horizonte $\mathcal{C} \subset U$, de forma que \tilde{K} es temporal en $U \setminus (\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D}(\Sigma))$. En particular, todo horizonte de Cauchy compacto cuya gravedad superficial pueda normalizarse es un horizonte de Killing.*

La existencia del campo normalizado es un punto crucial para los argumentos usados en las pruebas. Si bien esta hipótesis puede parecer artificial, todos los ejemplos conocidos los cumplen. En particular, como fue discutido en la Observación 2.3.2, esta hipótesis también implica que el horizonte es no degenerado.

Los teoremas de Petersen y Rácz muestran que la conjetura es cierta en aquellos horizontes donde existe un campo K nulo y sin ceros que satisface (2.4.2). Finalmente, la existencia de un tal campo resulta ser equivalente a la no-degeneración del horizonte de Cauchy [Teo. 3, [41]].

Teorema 2.4.5 (Reiris-B.). *Sea \mathcal{C} un horizonte de Cauchy compacto, conexo y no degenerado en un espacio-tiempo vacío $n+1$ -dimensional (M, g) . Entonces todas las geodésicas nulas dirigidas a futuro tienen longitud afín finita. Más aún, existe un campo nulo, que no se anula en ningún punto K en \mathcal{C} tal que*

$$\nabla_K K = -K.$$

Además, el campo K es suave.

Uniendo estos tres resultados, la Conjetura 2.4.1 queda demostrada.

Es pertinente remarcar que no se conocen ejemplos de horizontes de Cauchy compactos degenerados: la hipótesis de no-degeneración del horizonte cubre todos los ejemplos conocidos de horizontes de Cauchy cosmológicos a la fecha. Sobre este caso, Isenberg y Moncrief conjeturan que no existen tales horizontes [33], y logran demostrarlo en la clase analítica de espacio-tiempos con topología $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}$ [Sec. IV, [32]].

Capítulo 3

El espacio de Taub-NUT

El espacio de Taub-NUT es un ejemplo de espacio-tiempo vacío en el que ocurren muchos fenómenos indeseables desde el punto de vista físico. En este se observan las siguientes propiedades:

- (I) Existe una región (llamada región de Taub) que es una solución cosmológica con hipersuperficies espaciales de Cauchy homogéneas pero no isotrópicas.
- (II) La región de Taub evoluciona a la región de NUT, que no contiene hipersuperficies de Cauchy espaciales.
- (III) Existen horizontes de Cauchy suaves que separan regiones globalmente hiperbólicas de regiones con geodésicas temporales cerradas.
- (IV) Existen extensiones inequivalentes del tipo NUT del espacio de Taub.

El objetivo de este capítulo será entender este ejemplo, que ha sido el motor de la teoría de los horizontes de Cauchy compactos. Para esto, comenzamos definiendo el espacio de Taub.

Definición 3.0.1. El espacio de Taub es el espacio-tiempo $(M = \mathbb{R}_t \times \mathbb{S}_{\psi, \theta, \phi}^3, g)$, donde g es,

$$g = -U^{-1}(t)dt^2 + (2l)^2U(t) (d\psi + \cos \theta d\phi)^2 + (t^2 + l^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.0.1)$$

$$U(t) = -1 + \frac{2(mt + l^2)}{t^2 + l^2}, \quad (3.0.2)$$

y m, l son constantes positivas y θ, ϕ, ψ son las coordenadas de Euler en la esfera \mathbb{S}^3 , por lo que $0 \leq \psi \leq 4\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi$. Observamos que existen singularidades en los tiempos $t = t_{\pm} := m \pm \sqrt{m^2 + l^2}$, donde $U(t_{\pm}) = 0$.

Puede mostrarse que el espacio de Taub satisface la ecuación de Einstein en el vacío, $\text{Ric} = 0$. Además se puede extender la solución de Taub a través las superficies $t = t_{\pm}$, obteniendo así la extensión vacía encontrada por Newman, Tamburino y Unti en 1963 [34] denominada espacio de Taub-NUT, que estudiaremos más adelante.

3.1. Propiedades del espacio de Misner

Comenzamos estudiando el espacio de Misner [29]. Este posee muchas características similares a las que presenta el espacio de Taub-NUT pero tiene una presentación más sencilla.

Definición 3.1.1. El espacio de Misner es $(M = \mathbb{S}_\psi^1 \times \mathbb{R}_t^+, g)$, donde g es,

$$g = -t^{-1}dt^2 + td\psi^2, \quad (3.1.1)$$

con $t \in \mathbb{R}^+$ y $0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Esta métrica es singular únicamente cuando $t = 0$. Sin embargo, podemos encajar el espacio de Misner en un espacio más grande que no presenta esta singularidad. Para esto, definimos $M_+ = \mathbb{S}_{\psi'}^1 \times \mathbb{R}_t$ con la métrica,

$$g_+ = 2d\psi' dt + td\psi'^2, \quad (3.1.2)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \psi' \leq 2\pi$. Pasando al cubrimiento universal (\widetilde{M}_+, g_+) de (M_+, g_+) , podemos considerar $\psi' \in (-\infty, +\infty)$. Observamos que la región $0 \leq \psi' \leq 2\pi$ es un dominio fundamental para (M_+, g_+) en (\widetilde{M}_+, g_+) y por lo tanto la proyección de las regiones $\{(t, \psi') \in \widetilde{M}_+ : t \in \mathbb{R}, \psi' \in (-\pi/2, 3/2\pi)\}$ y $\{(t, \psi') \in \widetilde{M}_+ : t \in \mathbb{R}, \psi' \in (\pi, 5/2\pi)\}$ forman un atlas de M_+ . La métrica (3.1.2) es analítica en la variedad $M_+ = \mathbb{S}_{\psi'}^1 \times \mathbb{R}_t$. Además, es no degenerada y de signatura constante, dado que el determinante de la métrica es constante. Definiendo una nueva coordenada ψ en \widetilde{M}_+ por,

$$\psi := \psi' + \log t, \quad (3.1.3)$$

donde el dominio del cambio de coordenadas es $t \in \mathbb{R}^+$, $\psi \in \mathbb{R}$, notamos que la métrica en términos de esta nueva variable es

$$g_+ = -t^{-1}dt^2 + td\psi^2, \quad (3.1.4)$$

que es la métrica de Misner en el cubrimiento $(\mathbb{R}_\psi \times \mathbb{R}_t^+, g)$ obtenido al desenrollar la variable ψ . Esto muestra que el espacio de Misner se encaja isométricamente en (M_+, g_+) . De esta forma, podemos considerar que (M_+, g_+) es una extensión del espacio de Misner (M, g) , el cual corresponde a la región $\{t > 0\}$ en (M_+, g_+) .

Estudiamos ahora las geodésicas nulas de (M_+, g_+) . Si escribimos estas geodésicas como $\gamma(s) = (e^{iv(s)}, t(s))$, la ecuación geodésica resulta,

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{t} + \dot{t}\dot{v} + \frac{1}{2}t\dot{v}^2, \\ 0 &= \ddot{v} - \frac{1}{2}\dot{v}^2. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

La condición $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ implica $\dot{t}\dot{v} + \frac{1}{2}t\dot{v}^2 = 0$, que simplifica la primer ecuación. Las soluciones quedan dadas por,

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (e^{iv(0)}, t(0)s + t(0)), \\ \gamma(s) &= \left(\frac{e^{iv(0)}}{\left(1 - \frac{\dot{v}(0)}{2}s\right)^{2i}}, -\frac{\dot{v}(0)}{2}t(0)s + t(0) \right). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

La primer familia está definida para todo $s \in \mathbb{R}$ y corresponde a las geodésicas verticales en la Figura 3.1, donde $\dot{v}(0) = 0$. Si $\dot{v}(0) > 0$, la segunda familia está definida para $s \in (-\infty, 2/\dot{v}(0))$. Si además $t(0) < 0$, la geodésica se aproximará a $\{t = 0\}$ en espiral cada vez más rápido, pero no cruzará esta curva. En particular, se tiene que la extensión (M_+, g_+) obtenida no es simétrica entre las dos familias de geodésicas, sino que hay un comportamiento distinguido.

Es sencillo mostrar que las curvas $\{t = c\}$ son: temporales si $c < 0$, espaciales si $c > 0$, y $c = 0$ es una curva nula. La curva $\mathcal{C}^- := \{t = 0\}$ resulta un horizonte de Cauchy para la región $\{t > 0\}$, pues todo por todo punto con $t < 0$ hemos encontrado una curva temporal cerrada que en particular no atraviesa a la región $\{t > 0\}$.

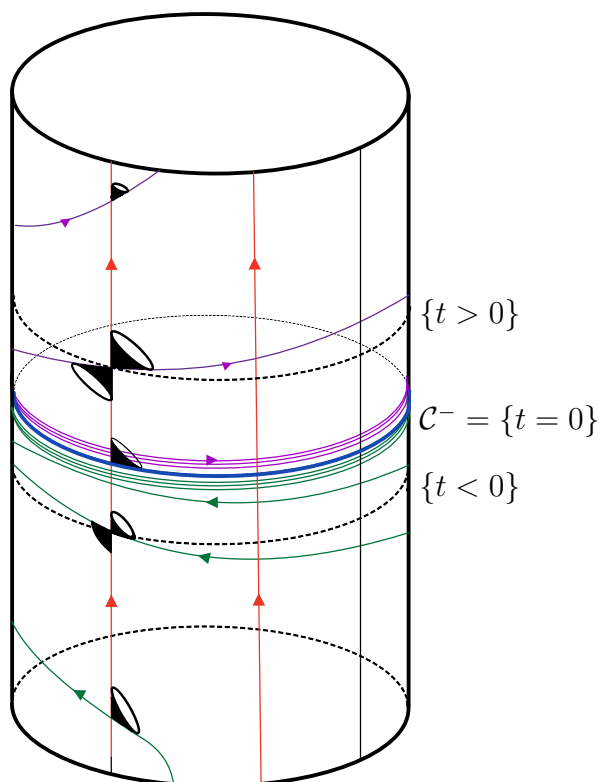


Figura 3.1: Representación de la extensión del espacio de Misner M_+ con sus geodésicas nulas. La región I corresponde al encaje de la variedad M en M_+ . La familia roja de geodésicas es completa y continúa a través de $\{t = 0\}$, y las familias representadas en verde y violeta se enrollan en $\{t = 0\}$ y son incompletas a futuro y pasado respectivamente. La naturaleza de las hipersuperficies $\{t = \text{cte}\}$ está representada por sus conos de luz.

Por otro lado, también es posible encajar isométricamente el espacio de Misner en $(M_- = \mathbb{S}_{\psi''}^1 \times \mathbb{R}_t, g_-)$, donde la métrica g_- es,

$$g_- = -2d\psi'' dt + t(d\psi'')^2. \quad (3.1.7)$$

Para esto procedemos de la misma forma que con M_+ , pero la nueva variable ψ en términos de (t, ψ'') será,

$$\psi := \psi'' - \log t, \quad (3.1.8)$$

y el dominio del cambio de coordenadas es $t \in \mathbb{R}^+$, $\psi'' \in \mathbb{R}$. Nuevamente, en coordenadas (ψ, t) , la métrica g'' se expresa,

$$g = -t^{-1}dt^2 + td\psi^2, \quad (3.1.9)$$

por lo que la región $t > 0$ de (M_-, g_-) es isométrica al espacio de Misner (M, g) . La métrica (3.1.7) es analítica, no degenerada y de signatura constante en M_- , y la curva $\{t = 0\}$ resulta un horizonte de Cauchy para la región de Misner. En esta extensión, el comportamiento de las geodésicas nulas se ha intercambiado con respecto al de la extensión (M_+, g_+) : las geodésicas nulas dirigidas a futuro comenzando en $\{t = 0\}$ en la extensión (M_-, g_-) , con condiciones iniciales $(0, \psi''_0)$ y velocidad inicial $(\dot{t}_0, \dot{\psi}''_0)$ están dadas por,

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (\psi''_0, \dot{t}_0 s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ \gamma(s) &= \left(\psi''_0 + \ln \left(\frac{\dot{\psi}''_0}{s + \dot{\psi}''_0} \right), 0 \right), \quad s \in (-\dot{\psi}''_0, \infty). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

La primera familia son geodésicas verticales que se continúan a través del horizonte, y la segunda familia es tangente al horizonte $\{t = 0\}$. Observamos que los generadores nulos del horizonte son completos a futuro e incompletos a pasado.

Al hacer esta nueva extensión hemos enderezado la segunda familia de geodésicas de M , y ahora puede continuarse a través del horizonte $\{t = 0\}$. Sin embargo, este proceso ha enrollado la primer familia de geodésicas y ahora no pueden continuarse más allá de $\{t = 0\}$; es decir, hemos intercambiado los comportamientos de estas dos familias. En particular, obtenemos dos extensiones inequivalentes, localmente inextendibles y analíticas de la variedad (M, g) . Además, ambas extensiones son geodésicamente incompletas.

Para ver la relación entre estas dos extensiones podemos ir al espacio de cubrimiento de (M, g) . Este espacio de cubrimiento resulta ser la región contenida dentro del cono nulo futuro de un punto p (región que denotaremos por I) en el espacio de Minkowski 2-dimensional (\mathbb{R}_1^1, η) . Las isometrías de \mathbb{R}_1^1 que fijan p forman un subgrupo 1-dimensional en el grupo de isometrías del espacio de Minkowski (el grupo de Lorentz $O_{1,1}(\mathbb{R})$), cuyas órbitas son las hipérbolas $\{\sigma = \text{cte}\}$, con $\sigma = \tilde{t}^2 - \tilde{x}^2$, donde (\tilde{t}, \tilde{x}) son las coordenadas usuales en \mathbb{R}_1^1 . Para obtener (M, g) a partir de \mathbb{R}_1^1 , recordamos la siguiente definición.

Definición 3.1.2. Una acción de un grupo G en una variedad M se dice *propriadamente discontinua* si:

- (i) para todo $q \in M$ existe un entorno U tal que $h(U) \cap U = \emptyset$ para todo $h \neq e \in G$, y,
- (ii) si $p, q \in M$ son tales que $h.p \neq q$ para todo $h \in G$, entonces existen entornos $U \ni p$ y $V \ni q$ disjuntos que cumplen $k(U) \cap V = \emptyset$ para todo $k \in G$.

La condición (i) nos asegura que M/G es una variedad, y la condición (ii) nos asegura que es Hausdorff.

El espacio (M, g) puede escribirse como el cociente de (I, η) por el subgrupo discreto G del grupo de Lorentz generado por,

$$A : \mathbb{R}_1^1 \rightarrow \mathbb{R}_1^1, A = \begin{pmatrix} \cosh \pi & \sinh \pi \\ \sinh \pi & \cosh \pi \end{pmatrix}, \tag{3.1.11}$$

cuya acción en el espacio de Minkowski resulta en el mapa

$$(\tilde{t}, \tilde{x}) \mapsto (\tilde{t} \cosh \pi + \tilde{x} \sinh \pi, \tilde{x} \cosh \pi + \tilde{t} \sinh \pi). \tag{3.1.12}$$

En el cociente, identificamos los puntos

$$(\tilde{t} \cosh n\pi + \tilde{x} \sinh n\pi, \tilde{x} \cosh n\pi + \tilde{t} \sinh n\pi), \tag{3.1.13}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y estos se proyectan a

$$t = \frac{1}{4}(\tilde{t}^2 - \tilde{x}^2), \quad \psi = 2 \operatorname{arctanh}(\tilde{x}/\tilde{t}) \in M. \tag{3.1.14}$$

La acción del grupo de isometrías G en la región I es propiamente discontinua. En particular, el cociente $(I, \eta)/G$ es una variedad Hausdorff, y obtenemos,

$$(I, \eta)/G \sim (M, g).$$

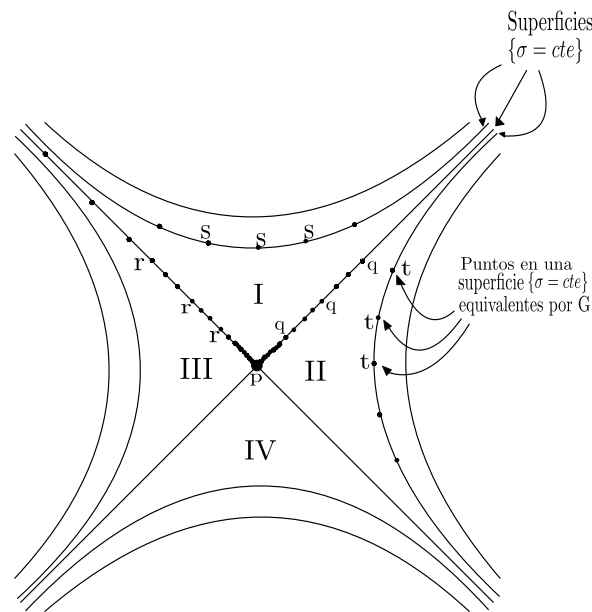


Figura 3.2: Cubrimiento universal del espacio de Misner, $I \subset \mathbb{R}_1^1$. El subgrupo discreto G del grupo de isometrías de Minkowski (el grupo de Lorentz) identifica los puntos denotados por s , y análogamente con los puntos r y q . La Figura 3.1 que describe una extensión del espacio de Misner se obtiene identificando los puntos equivalentes por la acción de G en la región $I + II$.

De hecho, la acción de G es también propiamente discontinua en las regiones I + II (es decir, la región $\{\tilde{t} > -\tilde{x}\}$) y I + III (que corresponde a $\{\tilde{t} > \tilde{x}\}$). El cociente de estas regiones por G es nuevamente Hausdorff y además,

$$(I + II, \eta)/G \sim (M_+, g_+), \quad (I + III, \eta)/G \sim (M_-, g_-).$$

Notamos en particular que esto implica que ambos espacios son planos, por lo que son soluciones a la ecuación de Einstein en el vacío.

Usando esta representación se puede ver por qué una familia de geodésicas puede ser completada en la extensión (M_+, g_+) y la otra en la extensión (M_-, g_-) .

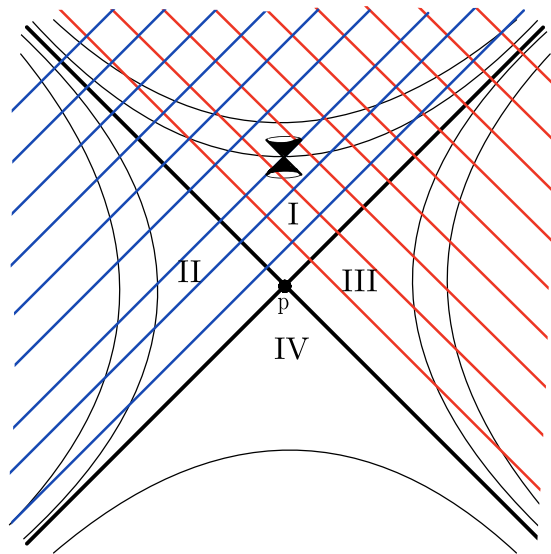


Figura 3.3: Representación de las extensiones no equivalentes del espacio de Misner I+II y I+III. Las geodésicas enderezadas en las extensiones corresponden a las geodésicas azules y rojas respectivamente.

Hemos extendido el espacio I de dos formas no equivalentes. Por otro lado, la construcción anterior sugiere que podría existir una posible extensión a ambas regiones a la misma vez, dado que las dos extensiones coinciden en I. Sin embargo, la acción de G en la unión de las regiones (I + II + III) (es decir, $\{t > -|x|\}$), no es propiamente discontinua, porque para los puntos q en el borde entre las regiones I y II, así como los puntos r en el borde entre las regiones I y III falla la propiedad (II). Por lo tanto, el cociente

$$(I + II + III, \eta)/G$$

no es Hausdorff, pero aún es una variedad. Este fenómeno ha sido estudiado por Hajiek [16] y Moncrief [30], entre otros.

Finalmente, consideremos las dos extensiones de Misner,

$$(M_{\pm}, g_{\pm}) := (\mathbb{R}_t \times \mathbb{S}_{\psi}^1, \pm 2dt d\psi + td\psi^2).$$

Tomamos el campo $V := \partial_\psi$. Observamos que es nulo en $\{t = 0\}$, y espacial en la región $\{t > 0\}$. Además, V es un campo de Killing para la métrica g . Por otro lado se cumple,

$$\begin{aligned} g(\nabla_V V, \partial_t) &= g(\nabla_{\partial_\psi} \partial_\psi, \partial_t) = -g(\partial_\psi, \nabla_{\partial_\psi} \partial_t) = -\frac{1}{2} \partial_t g(\partial_\psi, \partial_\psi) = -\frac{1}{2}, \\ g(\nabla_V V, \partial_\psi) &= g(\nabla_{\partial_\psi} \partial_\psi, \partial_\psi) = \frac{1}{2} \partial_\psi g(\partial_\psi, \partial_\psi) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

En particular, se sigue que $\nabla_V V = \mp \frac{1}{2} V$ en M_\pm . Definiendo el campo

$$K := \mp 2V, \quad (3.1.16)$$

observamos que,

$$\nabla_K K = 4\nabla_V V = \mp 2V = K. \quad (3.1.17)$$

Ahora, en $\{t = 0\}$, $g(K, K) = 4g(V, V) = 4g(\partial_\psi, \partial_\psi) = 0$, por lo que K es un campo nulo tangente al horizonte en $\{t = 0\}$. En particular de (3.1.17) se sigue que la geodésica nula γ que inicia en un punto $\gamma(0) = (0, \psi) \in \mathcal{C}^-$ con velocidad $\gamma'(0) = K((0, \psi))$ debe volver sobre sí misma infinitas veces con diferentes velocidades, y entonces γ no es completa por la Proposición 2.3.1. Un cálculo sencillo muestra además que estas geodésicas tienen longitud afín a pasado igual a uno.

3.2. Propiedades del espacio de Taub-NUT

Volvemos ahora al espacio de Taub, (M, g) , donde $M = \mathbb{R}_t \times \mathbb{S}_{\psi, \theta, \phi}^3$ y la métrica g está dada por (3.0.1). Como M es simplemente conexa, no podemos construir extensiones tomando un espacio de cubrimiento como hicimos en el ejemplo de Misner. Sin embargo, podemos conseguir resultados similares considerando M como un fibrado sobre la esfera \mathbb{S}^2 con fibra $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. La proyección del fibrado $\pi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ está definida en coordenadas por $(t, \psi, \theta, \phi) \mapsto (\theta, \phi)$, y este espacio es de hecho el producto del eje t con la fibración de Hopf $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ (cuya definición puede encontrarse en [45]).

El espacio (M, g) admite un grupo de isometrías 4-dimensional, cuyas superficies de transitividad son las 3-esferas $\{t = \text{cte}\}$. Este grupo de isometrías manda fibras de $\pi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ en fibras, por lo que los pares (\mathcal{F}, \tilde{g}) , donde $\mathcal{F} \sim \mathbb{R}_t \times \mathbb{S}_\psi^1$, con $t_- \leq t \leq t_+$ y $0 \leq \psi \leq 4\pi$ es una fibra y \tilde{g} es la métrica inducida en \mathcal{F} por g , son todos isométricos. La métrica \tilde{g} queda dada de acuerdo a (3.0.1) por,

$$\tilde{g} = -U^{-1}(t)dt^2 + 4l^2U(t)d\psi^2. \quad (3.2.1)$$

El espacio tangente $T_q M$ puede descomponerse entonces en un subespacio vertical V_q tangente a la fibra \mathcal{F} , que estará generado por los vectores $\partial_t, \partial_\psi$, y un subespacio horizontal H_q generado por los vectores ∂_θ y $\partial_\phi - \cos \theta \partial_\psi$. Todo vector $X \in T_q M$ se descompone de forma única como $X = X_V + X_H$, donde X_V es la componente vertical y X_H la componente horizontal. La métrica en esta descomposición está dada por,

$$g(X, Y) = g_V(X_V, Y_V) + (t^2 + l^2)g_H(\pi_* X_H, \pi_* Y_H), \quad (3.2.2)$$

donde $g_V \equiv \tilde{g}$ y g_H es la métrica estándar en la 2-esfera, dada por $g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Observamos que, si bien la métrica g no es la suma directa de g_V y $(t^2 + l^2)g_H$ (dado que $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ no es el producto directo de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ y \mathbb{S}^2), siempre podemos considerarla de esta forma localmente.

En esta descomposición, la única parte de g que presenta singularidades es g_V , por lo que consideraremos extensiones analíticas del par (\mathcal{F}, g_V) . Combinando estas extensiones con la métrica horizontal (\mathbb{S}^2, g_H) como en (3.2.2), obtendremos extensiones analíticas de (M, g) .

Al igual que la métrica de Taub, la métrica (3.2.1) presenta singularidades en $t = t_{\pm}$, donde $U(t_{\pm}) = 0$. Procediendo de la misma forma que en la Sección 3.1, definimos $(\mathcal{F}' = \mathbb{R}_t \times \mathbb{S}_{\psi'}^1, g'_V)$, donde $t \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \psi \leq 4\pi$, y g'_V está dada por,

$$g'_V = 4ld\psi'(lU(t)d\psi' - dt). \quad (3.2.3)$$

Esta métrica es analítica, no degenerada y de signatura constante para todo (t, ψ') , dado que el determinante de la métrica es constante. Pasando al cubrimiento universal $(\tilde{\mathcal{F}}', g'_V)$ (donde consideramos $\psi' \in \mathbb{R}$) y definiendo en la región $t_- \leq t \leq t_+$ una nueva coordenada ψ por,

$$\psi := \psi' - \frac{1}{2l} \int \frac{dt}{U(t)}, \quad (3.2.4)$$

la métrica g'_V resulta,

$$g'_V = -U^{-1}(t)dt^2 + 4l^2U(t)d\psi^2, \quad (3.2.5)$$

por lo que la región $t \in (t_-, t_+)$ de (\mathcal{F}', g'_V) es isométrica a (\mathcal{F}, g_V) . No hay curvas temporales cerradas en esta región, pero sí las hay para $t < t_-$ y $t > t_+$ (basta tomar las curvas $\{t = \text{cte}\}$). Este comportamiento es muy similar a lo que ocurre en la extensión del espacio de Misner, excepto que ahora nos encontramos con dos horizontes en vez de uno solo. Una familia de geodésicas nulas cruza ambos horizontes, mientras que la otra familia se acerca en espiral a estas curvas y es incompleta.

Como ocurre para el espacio de Misner, definiendo $(\mathcal{F}'' = \mathbb{R}_t \times \mathbb{S}_{\psi''}^1, g''_V)$, donde

$$g''_V = 4ld\psi''(lU(t)d\psi'' + dt), \quad (3.2.6)$$

obtenemos otra posible extensión de la fibra (\mathcal{F}, g_V) . Nuevamente es sencillo ver que g''_V es analítica, no degenerada y de signatura constante para todo (t, ψ'') . En este caso, la variable ψ a considerar será,

$$\psi := \psi'' + \frac{1}{2l} \int \frac{d}{U(t)} dt. \quad (3.2.7)$$

Estudiamos la relación entre estas extensiones. Pasando al cubrimiento de (\mathcal{F}, g_V) , que denotamos por $(\tilde{\mathcal{F}}, g_V)$, y considerando coordenadas $\psi, t \in (-\infty, +\infty)$, la métrica g_V puede ser escrita en la forma doble nula,

$$g_V = 4l^2U(t)d\psi'd\psi'', \quad (3.2.8)$$

donde $\psi', \psi'' \in (-\infty, +\infty)$. Definimos nuevas coordenadas (u_+, v_+) y (u_-, v_-) en \mathcal{F} como,

$$u_{\pm} = \arctan(\exp(\psi'/\alpha_{\pm})), \quad v_{\pm} = \arctan(-\exp(-\psi''/\alpha_{\pm})), \quad (3.2.9)$$

donde las funciones α_{\pm} están dadas por

$$\alpha_+ = \frac{t_+ - t_-}{4l(mt + l^2)} \quad \text{y} \quad \alpha_- = \frac{t_+ - t_-}{4nl(mt + l^2)}, \quad (3.2.10)$$

con n un entero mayor que $(mt_+ + l^2)/(mt_- + l^2)$. La métrica \tilde{g}_V , obtenida al aplicar esta transformación a (3.2.8), es analítica en la variedad $\tilde{\mathcal{F}}$, y las coordenadas (u_+, v_+) son analíticas salvo en $t = t_-$, donde son al menos C^3 (ver [25]). Análogamente, las coordenadas (u_-, v_-) son analíticas excepto en $t = t_+$, donde son al menos C^3 .

El espacio $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_V)$ tiene un grupo de isometrías 1-dimensional, cuyas órbitas pueden verse en la siguiente figura.

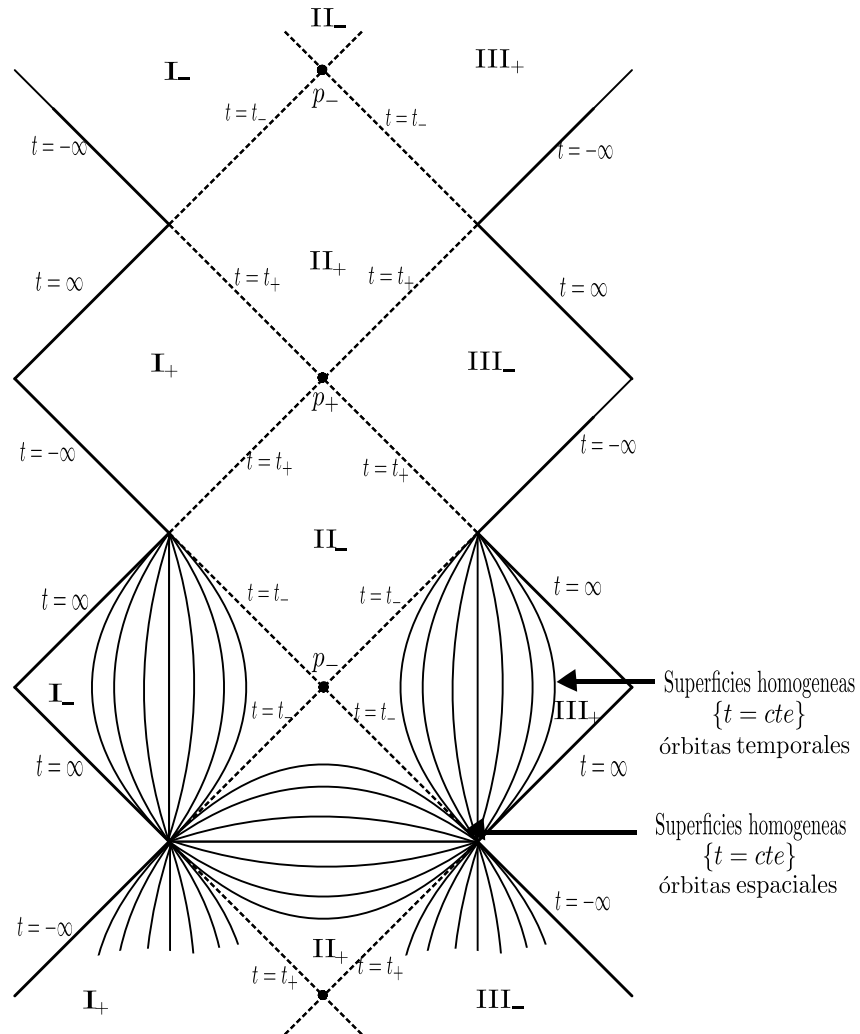


Figura 3.4: Diagrama de Penrose del cubrimiento del espacio maximalmente extendido de una sección 2-dimensional del espacio de Taub-NUT, mostrando las órbitas del grupo de isimetría de $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_V)$. El espacio de Taub-NUT y sus extensiones no equivalentes se obtienen de la identificación de partes de este diagrama por la acción discreta del subgrupo G del grupo de isometrías. Las regiones denotadas por II_{\pm} corresponden a eventos de Taub, y las regiones I_{\pm} , III_{\pm} son eventos de NUT.

Cerca de los puntos p_+, p_- la acción de este grupo es similar a la acción del grupo de Lorentz en el espacio de Minkowski 2-dimensional visto en la Figura 3.2. Consideramos ahora G el subgrupo discreto de isometrías generado por un elemento no trivial A del grupo de isometrías de $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_V)$. El espacio (\mathcal{F}, g_V) es el cociente de una de las regiones $(\text{II}_+, \tilde{g}_V)$ por G . Los espacios (\mathcal{F}', g'_V) y (\mathcal{F}'', g''_V) están dados por los cocientes

$$(\mathcal{F}', g'_V) \sim (\text{I}_- + \text{II}_+ + \text{III}_-, \tilde{g}'_V)/G, \quad (\mathcal{F}'', g''_V) \sim (\text{I}_+ + \text{II}_+ + \text{III}_+)/G.$$

También pueden obtenerse variedades Hausdorff tomando el cociente de las regiones $(\text{I}_+ + \text{II}_+ + \text{I}_-)$, lo que corresponde a extender (\mathcal{F}', g'_V) en la superficie $\{t = t_+\}$ como se hace para la extensión (\mathcal{F}'', g''_V) en la superficie $\{t = t_-\}$ (ver [25]).

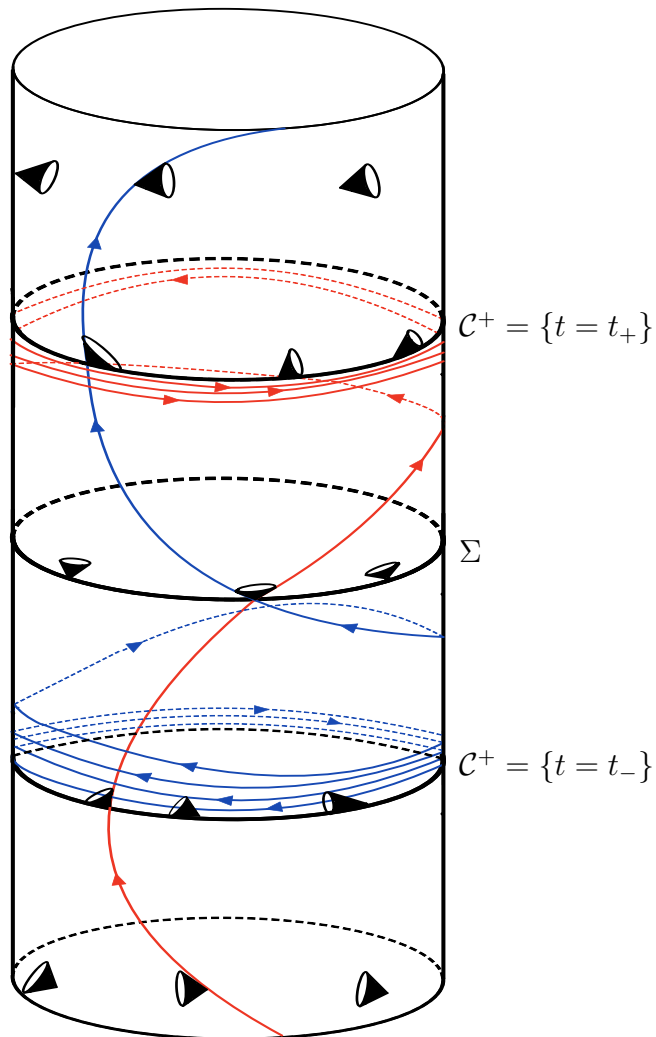


Figura 3.5: Representación de una posible extensión del espacio de Taub $t_- < t < t_+$. En esta extensión, una familia de geodésicas se enrolla en el horizonte \mathcal{C}^+ y atraviesa \mathcal{C}^- , mientras que la otra familia atraviesa \mathcal{C}^+ y se enrolla en \mathcal{C}^- . La hipersuperficie $\Sigma \sim \mathbb{S}^3$ es una hipersuperficie de Cauchy para la región delimitada por los horizontes \mathcal{C}^\pm . Esta extensión corresponde a un cociente de la región $\text{I}_+ + \text{II}_+ + \text{I}_-$ en el cubrimiento del espacio de Taub-NUT.

Combinando las extensiones de (t, ψ) con las coordenadas (θ, ϕ) , obtenemos las extensiones correspondientes del espacio 4-dimensional (M, g) . En particular las dos extensiones (\mathcal{F}', g'_V) y (\mathcal{F}'', g''_V) obtenidas previamente dan dos extensiones diferentes, localmente inextendibles y analíticas de (M, g) , y ambas son geodésicamente incompletas.

Consideremos una de estas extensiones, por ejemplo la obtenida a partir de (\mathcal{F}', g'_V) . Usando el Teorema 1.1.1, vemos que la regi3n (t_-, t_+) es globalmente hiperb3lica. Las superficies de transitividad $\{t = \text{cte}\}$ son hipersuperficies de Cauchy espaciales dentro de esta regi3n, y las hipersuperficies $\{t = t_{\pm}\}$ son los horizontes de Cauchy para su desarrollo maximalmente globalmente hiperb3lico: para probar esto observamos que las curvas que cumplen $t, \theta, \phi = \text{cte}$, $0 \leq \psi \leq 4\pi$ son curvas temporales cerradas si $t \in \mathbb{R} \setminus (t_-, t_+)$ y por lo tanto no cruzan a la regi3n (t_-, t_+) .

La regi3n del espacio-tiempo dada por $t_- \leq t \leq t_+$ es compacta, y sin embargo, existen geodésicas temporales y nulas que permanecen en ella y son incompletas. Adem3s, en el horizonte se observan propiedades similares a las del horizonte del espacio de Misner: los generadores son incompletos y existe un campo nulo K en el horizonte tal que

$$\nabla_K K = K,$$

que es la restricci3n de un campo de Killing \tilde{K} de la regi3n de Taub y con las mismas propiedades que fueron discutidas para el ejemplo de Misner.

3.3. El espacio de Taub-NUT y la conjetura de Censura C3smica fuerte

Analicemos ahora el ejemplo de Taub-NUT en el contexto del problema de evoluci3n en Relatividad General. La discusi3n del final del capítulo anterior nos muestra que la regi3n de Taub dada por $t \in (t_-, t_+)$ es una regi3n maximalmente globalmente hiperb3lica. Los horizontes de Cauchy $t = t_{\pm}$ separan esta regi3n maximalmente globalmente hiperb3lica del resto del espacio, y a trav3s de estos horizontes se tienen m3ltiples extensiones inequivalentes.

Cabe observar que a partir de cualquiera de las dos extensiones anteriores es sencillo obtener una cantidad no numerable de extensiones diferentes del espacio de Taub. Para esto, consideramos una de las extensiones del espacio de Taub discutidas anteriormente, que denotamos por (M, g) . En la regi3n que viola la causalidad, removemos conjuntos U de forma que $M \setminus U$ no sea simplemente conexo. Tomando cualquier extensi3n maximal analítica vacía del cubrimiento universal de $(M \setminus U, g)$ podemos conseguir una cantidad no numerable de extensiones maximales, analíticas y vacías de la regi3n de Taub que son no isométricas dos a dos. Los detalles de esta construcci3n pueden encontrarse en [10]. Resumimos esta discusi3n en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Consideramos el espacio de Taub $(\mathcal{M}_{(t_-, t_+)}, g)$. Entonces,*

1. $(\mathcal{M}_{(t_-, t_+)}, g)$ es maximalmente globalmente hiperb3lico.

2. Existe una familia no numerable de extensiones de $(\mathcal{M}_{(t_-, t_+)}, g)$ que son analíticas, vacías, simplemente conexas y no isométricas dos a dos.

Observamos entonces que las ecuaciones de Einstein no pueden considerarse “predictivas” para un dato inicial de Taub.

Este ejemplo muestra cuáles son las limitaciones del Teorema de Choquet-Bruhat-Geroch: la unicidad para la evolución del dato inicial solo se obtiene dentro de la clase de espacios globalmente hiperbólicos, y a veces estos espacios pueden extenderse a espacio-tiempos más grandes.

Sin embargo, ha sido sugerido por Penrose que esta no-unicidad ocurre únicamente en circunstancias muy especiales. Esta conjetura se conoce como la *Conjetura de Censura Cósmica Fuerte*, y una formulación matemática de la misma, debida a Chruściel [40] y basada en ideas de Eardley, Moncrief y Penrose [36, 31] es la siguiente.

Conjetura 3.3.1 (Conjetura de Censura Cósmica Fuerte, caso vacío). Para un dato inicial genérico (Σ, g, K) de la ecuación de Einstein en el vacío, el desarrollo maximalmente globalmente hiperbólico es inextendible.

Si un desarrollo maximalmente globalmente hiperbólico fuese un subconjunto abierto propio de un espacio-tiempo más grande, podría ser extendido a través de un horizonte de Cauchy. Por lo tanto, resulta crucial entender si la existencia de estos horizontes impone alguna restricción en la geometría del espacio-tiempo.

Parte II

Clasificación de los horizontes de Cauchy compactos

Capítulo 4

Clasificación de 3-variedades Riemannianas compactas con simetrías continuas

Como adelantamos en la Introducción, el estudio de los horizontes de Cauchy compactos desemboca naturalmente en el estudio de 3-variedades Riemannianas compactas que presentan simetrías continuas. Para clasificar dichos horizontes, clasificaremos primero estas variedades.

Recordamos que si K es un campo de Killing en una variedad compacta (M, g) podemos definir $\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ como la solución a la ecuación diferencial ordinaria,

$$\frac{d\varphi(p, z)}{dz} = K(\varphi(p, z)), \quad \varphi(p, 0) = p,$$

donde z es el parámetro de las curvas integrales de K . Definiendo $\varphi_z : M \rightarrow M$ como el difeomorfismo $\varphi_z(p) := \varphi(p, z)$, dado que $\varphi_{z+s} = \varphi_z \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_z$ y K es un campo de Killing, $\{\varphi_z : z \in \mathbb{R}\}$ es un subgrupo abeliano del grupo de isometrías de M . Este hecho justifica el estudio de la estructura de los subgrupos abelianos de isometrías de M . Recordamos primero algunas nociones de grupos de Lie y acciones en variedades Riemannianas.

4.1. Nociones básicas sobre de grupos de Lie y acciones

Comenzamos fijando notación y recordando algunas propiedades básicas sobre la estructura de los grupos y subgrupos de Lie. Una introducción a la teoría de grupos de Lie puede encontrarse en [24]. Enunciamos a continuación el Teorema de Cartan, cuya prueba puede encontrarse en [Teo. 1.42, [1]].

Teorema 4.1.1 (Teorema de Cartan). *Todo subgrupo cerrado H de un grupo de Lie G es un subgrupo de Lie, y por lo tanto una subvariedad de G .*

Usando este teorema se prueba la siguiente clasificación, cuya demostración puede hallarse en [Teo. 1.41, [1]].

Teorema 4.1.2 (Clasificación de grupos de Lie abelianos). *Todo grupo de Lie abeliano conexo es de la forma $\mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^k$, donde $\mathbb{T}^r = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{r\text{-veces}}$ es el toro r -dimensional.*

Fijamos ahora la notación para las acciones de grupos y los mapas inducidos por éstas, y recordamos también algunas definiciones relacionadas.

Definición 4.1.1. Sea G un grupo de Lie y M una variedad suave. Un mapa suave $F : G \times M \rightarrow M$ se dice una *acción* (a izquierda) de G en M si:

1. $F(e, x) = x$ para todo $x \in M$,
2. $F(g_1, F(g_2, x)) = F(g_1g_2, x)$, para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in M$.

Denotaremos $F(g, x)$ por $g.x$. Existen dos mapas naturales asociados a una acción F : el mapa evaluación en $x \in M$, definido por $\text{ev}_x(g) = F(g, x) = g.x$ y el mapa $\phi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ dado por $\phi(g)(x) = F(g, x) = g.x$. Denotaremos también $\phi_g := \phi(g)$.

Consideraremos únicamente acciones suaves a izquierda. Recordamos que una acción de G en (M, g) se dice *isométrica* si ϕ_h es una isometría para todo $h \in G$. La órbita por $p \in M$ del grupo G será denotada por $G.p$ o $\mathcal{O}_G(p)$ indistintamente (eligiendo según sea conveniente), y es el subconjunto

$$\mathcal{O}_G(p) := \{g.p : g \in G\} =: G.p.$$

El *grupo de isotropía* en $p \in M$ se denotará por G_p y es

$$G_p = \{g \in G : g.p = p\}.$$

Dados $p, p' \in M$ en la misma órbita, entonces claramente se tiene que $G.p = G.p'$. Por lo tanto, podemos descomponer M en una unión disjunta de G -órbitas. Observamos que para todo $g \in G$ y $p \in M$, $G_{g.p} = gG_p g^{-1}$, por lo que los grupos de isotropía en una misma órbita están en la misma clase de conjugación.

Definición 4.1.2. Una acción de un grupo de Lie G en M se dice *propia* si el mapa

$$K : G \times M \rightarrow M \times M, \quad (g, m) \mapsto (g.m, m),$$

es propio, i.e., la preimagen de todo conjunto compacto es compacta.

Usaremos repetidamente el siguiente resultado sobre órbitas de acciones propias.

Teorema 4.1.3 (Teo. 3.41, [1]). *Supongamos que G actúa propiamente en M . Entonces toda órbita $\mathcal{O}_G(p)$ es una subvariedad encajada cerrada de M .*

Sobre el espacio de órbitas de estas acciones, podemos decir lo siguiente.

Proposición 4.1.4 (Af. 3.36, [1]). *Si G actúa propiamente en M , el cociente M/G es Hausdorff.*

Sobre el grupo de isometrías de una variedad compacta se conoce el siguiente resultado, cuya prueba se encuentra en [Sec. VI, Teo. 3.4, [20]].

Teorema 4.1.5 (Myers-Steenrod). *Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta. Entonces el grupo de isometrías $\mathcal{I}(M)$ de (M, g) es un grupo de Lie compacto.*

Este teorema permite además mostrar una importante relación entre acciones propias y acciones isométricas.

Proposición 4.1.6 (Prop. 3.62, [1]). *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y G un subgrupo cerrado del grupo de isometrías $\mathcal{I}(M)$. La acción $F : G \times M \ni (g, x) \mapsto g.x \in M$ es propia.*

Estaremos particularmente interesados en la estructura local del espacio de órbitas dada una acción de un grupo de Lie sobre una variedad. Para el estudio de esta estructura local, definimos a continuación las secciones y entornos tubulares de las órbitas por la acción del grupo.

Definición 4.1.3. Sea $F : G \times M \rightarrow M$ una acción. Una *sección* en $p \in M$ es una subvariedad encajada $S_p \ni p$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $T_p M = d(\text{ev}_p)\mathfrak{g} \oplus T_p S_p$ y $T_x M = d(\text{ev}_x)\mathfrak{g} + T_x S_p$ para todo $x \in S_p$.
2. S_p es invariante bajo G_p , i.e., si $x \in S_p$ y $g \in G_p$, $g.x \in S_p$.
3. Si $x \in S_p$ y $g \in G$ son tales que $g.x \in S_p$, entonces $g \in G_p$.

Ejemplo 4.1.1. Consideremos la acción de $SO(2) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$(A, b).(x_1, x_2, x_3) \mapsto (A(x_1, x_2), b + x_3).$$

La órbita $G.x$ de un vector $x \in \mathbb{R}^3$ con $r^2 = x_1^2 + x_2^2 > 0$ es un cilindro redondo de radio r cuyo eje de rotación es el eje z , y su grupo de isotropía es $G_x = \{e\}$. La órbita de un vector $x = (0, 0, x_3)$ es el eje z , y su grupo de isotropía $G_x = SO(2)$ es el grupo de rotaciones alrededor del eje z . Una sección para esta acción en un punto $x \in \mathbb{R}^3$ será entonces un segmento recto $S_x = \{tx_1, tx_2, x_3\} : |t - 1| < \epsilon\}$ si $r^2 = x_1^2 + x_2^2 > 0$, o un disco $S_x = \{(y_1, y_2, x_3) : y_1^2 + y_2^2 < \epsilon\}$ si $r^2 = x_1^2 + x_2^2 = 0$. Notamos que las secciones son invariantes bajo los correspondientes grupos de isotropía $G_x = \{e\}$ y $G_x = SO(2)$.

Sobre la existencia de estas secciones, se tiene el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [Teo. 3.49, [1]].

Teorema 4.1.7 (Teorema de la sección). *Sea $F : G \times M \rightarrow M$ una acción propia y $p \in M$. Entonces existe una sección S_p en p .*

Definición 4.1.4. Sea F una G -acción propia en M y dado $p \in M$, sea S_p una sección en p . Un *entorno tubular* de la órbita $\mathcal{O}_G(p)$ es la imagen de una sección S_p por la acción de G , es decir,

$$\text{Tub}(\mathcal{O}_G(p)) := G.S_p.$$

Notamos que por la Proposición 4.1.6, las secciones y entornos tubulares también existen para acciones isométricas de subgrupos cerrados del grupo de isometrías.

4.2. Resultados sobre acciones isométricas en variedades Riemannianas

A partir de ahora, estamos interesados únicamente en acciones isométricas sobre variedades compactas. Dada una G -acción isométrica en una variedad Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, nos referiremos a las direcciones tangentes a las órbitas como direcciones verticales, y las direcciones normales a las órbitas serán las direcciones horizontales. De esta manera, el *espacio vertical* queda,

$$\eta_x \mathcal{O}_G(x) := T_x \mathcal{O}_G(x), \quad (4.2.1)$$

y entonces el *espacio horizontal* queda,

$$\nu_x \mathcal{O}_G(x) := \{\nu \in T_x M : \langle \nu, X \rangle_x = 0 \text{ para todo } X \in T_x \mathcal{O}_G(x)\} = T_x \mathcal{O}_G(x)^\perp. \quad (4.2.2)$$

Obtenemos así una descomposición ortogonal $T_x M = \eta_x \mathcal{O}_G(x) \oplus \nu_x \mathcal{O}_G(x)$. Observamos que las dimensiones de $\eta_x \mathcal{O}_G(x)$ y $\nu_x \mathcal{O}_G(x)$ pueden variar con $x \in M$, por lo que no son necesariamente distribuciones en M . Esta descomposición del fibrado tangente nos permite obtener una elección canónica de sección para cada punto $x \in M$, como vemos a continuación.

Definición 4.2.1. Sea $F : G \times M \rightarrow M$ una acción isométrica. Dado $\epsilon > 0$, $S_x = \exp(B_\epsilon(0))$ es una sección en x llamada *sección normal*, donde $B_\epsilon(0) \subset \nu_x \mathcal{O}_G(x)$ es una bola abierta de radio ϵ en el espacio horizontal a $\mathcal{O}_G(x)$.

Definición 4.2.2. Sea $F : G \times M \rightarrow M$ una acción isométrica y S_x la sección normal en $x \in M$. La *representación de sección* de G_x es la representación lineal (ortogonal) dada por

$$G_x \ni g \mapsto d(\phi_g)_x \in O(\nu_x \mathcal{O}_G(x)) \subset GL(\nu_x \mathcal{O}_G(x)).$$

Aplicaremos las definiciones anteriores al estudio de las órbitas de una acción isométrica a izquierda. Estaremos interesados únicamente en acciones por grupos G compactos.

Definición 4.2.3. Sea $F : G \times M \rightarrow M$ una acción isométrica a izquierda. Decimos que $\mathcal{O}_G(x)$ es una *órbita principal* si existe un entorno V de $x \in M$ tal que para todo $y \in V$, $G_x \subset G_{g,y}$, para algún $g \in G$. Observamos que esta condición es equivalente a que localmente el grupo de isotropía G_x sea minimal.

Proposición 4.2.1. Sea $F : G \times M \rightarrow M$ una acción isométrica a izquierda y $G < \mathcal{I}(M)$ un subgrupo cerrado. Entonces las siguientes son equivalentes:

1. $\mathcal{O}_G(x)$ es una órbita principal,
2. Si S_x es una sección en x , entonces $G_x = G_y$ para todo $y \in S_x$.

Demostración. Probamos que 1 implica 2. Usando la definición de sección, para todo $y \in S_x$, se tiene que $G_y \subset G_x$, dado que si $g \in G_y$, $g \cdot y = y \in S_x$, y por lo tanto $g \in G_x$. Por otra parte, si $\mathcal{O}_G(x)$ es una órbita principal, existe un g tal que $gG_xg^{-1} \subset G_y \subset G_x$. Como la acción es isométrica y G es cerrado, la Proposición 4.1.6 nos asegura que la acción es propia. En particular, se tiene que, usando la notación de la Definición 4.1.2, $G_x = \pi_1(K^{-1}(x \times x))$, por lo que los subgrupos de isotropía son compactos. Esto implica que las inclusiones anteriores deben ser igualdades. Entonces $G_x = G_y$.

Para probar que 2 implica 1, debemos mostrar que para todo z en un entorno tubular $\text{Tub}(\mathcal{O}_G(x))$ de x , existe g tal que $G_x \subset gG_zg^{-1}$. La órbita $\mathcal{O}_G(z)$ intersecta la sección S_x en al menos un punto, que llamaremos y . Como y y z están en la misma órbita, existe g tal que $y = gz$ y entonces $G_y = G_{g \cdot z} = gG_zg^{-1}$. Entonces $G_x = G_y = gG_zg^{-1}$, y por lo tanto $G(x)$ es una órbita principal. \square

Observamos que esta equivalencia implica que, si $F : G \times M \rightarrow M$ es una acción isométrica y S_x una sección normal en x , $\mathcal{O}_G(x)$ es una órbita principal si y solo si la representación de sección de G_x es trivial.

Acerca de la existencia de órbitas principales para acciones isométricas, enunciamos el siguiente resultado cuya prueba puede encontrarse en [Teo. 3.82, [1]].

Teorema 4.2.2. *Sea $F : G \times M \rightarrow M$ una acción isométrica, donde $G < \mathcal{I}(M)$ es cerrado y M es conexa y compacta, y sea M_{princ} el conjunto de puntos de M contenidos en una órbita principal. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. M_{princ} es abierto y denso en M .
2. El subconjunto $M_{\text{princ}}/G \subset M/G$ es una variedad conexa.
3. Si $\mathcal{O}_G(x)$ y $\mathcal{O}_G(y)$ son órbitas principales, existe $g \in G$ tal que $G_x = gG_yg^{-1}$.

Las órbitas principales son uno de los posibles tipos de órbita para acciones isométricas y, como afirma el teorema, son genéricas. Observamos que la dimensión de las órbitas principales es maximal entre las órbitas para la acción de G , dado que su grupo de isotropía es localmente minimal. Definimos ahora los otros posibles tipos, a los que haremos referencia en la siguiente sección.

Definición 4.2.4. *Sea $F : G \times M \rightarrow M$ una acción isométrica en una variedad compacta M . Decimos que una órbita $\mathcal{O}_G(x)$ es:*

1. *Regular*, si la dimensión de $\mathcal{O}_G(x)$ coincide con la dimensión de las órbitas principales.
2. *Excepcional*, si es regular pero no principal.
3. *Singular*, si no es regular.

Todas las definiciones se usan equivalentemente para puntos: un punto es regular si su órbita es regular, singular si su órbita es singular y excepcional si su órbita es excepcional.

4.3. Clasificación de 3-variedades Riemannianas con simetrías continuas

Denotamos por $\text{cl}(A)$ la clausura de un subconjunto A en una variedad.

Proposición 4.3.1. *Sea H un subgrupo conexo abeliano de un grupo de Lie compacto G . Entonces $\text{cl}(H)$ es un subgrupo de Lie abeliano, compacto y conexo de G y por lo tanto isomorfo a \mathbb{T}^n , para algún $n \geq 1$.*

Demostración. Como la clausura de un conjunto conexo es conexa, $\text{cl}(H)$ es conexa. Como G es compacto y $\text{cl}(H)$ es cerrado, $\text{cl}(H)$ es compacto.

Sea $g = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i$, y $h = \lim_{i \rightarrow \infty} h_i$, con $g_i, h_i \in H$. Entonces, como el grupo es abeliano y la multiplicación es continua,

$$gh = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i h_i = \lim_{i \rightarrow \infty} h_i g_i = hg.$$

Luego $\text{cl}(H)$ es un subgrupo abeliano de G . Por lo tanto $\text{cl}(H)$ es un subgrupo abeliano, conexo y compacto de G , de donde se sigue que es un grupo de Lie, isomorfo a \mathbb{T}^n . \square

Proposición 4.3.2. *Supongamos que H es un subgrupo compacto, conexo y abeliano del grupo de isometrías $\mathcal{I}(M)$ que actúa en (M, g) transitivamente. Entonces (M, g) es un toro plano.*

Demostración. Primero notamos que $H_p = H_q$ para todo $p, q \in M$: si $h.p = p$ y $h.q = q$, entonces $h.q = h.(g.p) = (g.h).p = g.(h.p) = g.p = q$, por lo que $h \in H_q$. Por lo tanto $H_p \subset H_q$, y revirtiendo las etiquetas obtenemos la igualdad. Entonces H/H_p actúa libre y transitivamente por isometrías en (M, g) . Como H/H_p es compacto, se sigue que es un subgrupo de Lie, y como además es conexo y abeliano, es isomorfo a \mathbb{T}^n para algún $n \geq 1$. Escribiendo $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}_{\theta_1}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}_{\theta_n}^1$, tenemos una acción por isometrías del toro.

Sea ahora $\Theta := (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Fijado Θ , el mapa $p \mapsto \Theta.p$ es una isometría, y entonces los campos vectoriales X_i , donde $i = 1, \dots, n$ en M dados por,

$$X_i(p) = \left. \frac{d}{d\theta_i} \Theta.p \right|_{\Theta=0}, \quad (4.3.1)$$

son campos de Killing. Tenemos entonces,

$$\frac{d}{d\theta_i} \Theta.p = X_i(\Theta.p) = d_p \Theta(X_i(p)). \quad (4.3.2)$$

Luego, si $X_i(p) = 0$ en algún punto p , X_i debe ser idénticamente cero en todo M por la última igualdad. En este caso, el mapa $\theta_i \mapsto \theta_i.p$ es constante por la primer igualdad (es decir, $\theta_i.p = p$ para todo θ_i), lo que contradice que la acción sea libre. Moviendo ahora p por X_i un tiempo θ_i y luego por X_j una cantidad θ_j , obtenemos $\theta_j \theta_i.p$, y haciéndolo en el orden opuesto obtenemos $\theta_i \theta_j.p$. Como \mathbb{T}^n es abeliano, los campos de Killing X_i y X_j conmutan para todo i, j . Nuevamente usando (4.3.2), se deduce que los campos $X_1(p), \dots, X_n(p)$ son linealmente independientes para

todo p . En particular, deben definir un sistema de coordenadas Euclídeo, y por lo tanto (M, g) es plana. Finalmente, el mapa $\mathbb{T}^n \rightarrow M$ dado por $\Theta \mapsto \Theta.p$ es biyectivo y no singular, por lo que M es difeomorfa a \mathbb{T}^n . \square

La proposición anterior nos permite mostrar la siguiente propiedad.

Proposición 4.3.3. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta y suave. Sea H un subgrupo de $\mathcal{I}(M)$ y $p \in M$. Entonces,*

$$\mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p) = \text{cl}(\mathcal{O}_H(p)). \quad (4.3.3)$$

Más aún, si H es conexo y abeliano, para todo punto $p \in M$ se tiene que $\mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$ es un punto o un toro plano encajado. Finalmente, para todo $q \in \mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$, la órbita $\mathcal{O}_H(q)$ es densa en $\mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$.

Demostración. $\mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$ es cerrada porque $\text{cl}(H)$ es compacta y la acción del grupo es continua. Luego, como $\mathcal{O}_H(p) \subset \mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$ se sigue que $\text{cl}(\mathcal{O}_H(p)) \subset \text{cl}(\mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)) = \mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$. Para probar la otra inclusión, fijamos $q \in \mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$. sea $\sigma \in \text{cl}(H)$ tal que $\sigma(p) = q$ y $\sigma_i \in H$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i = \sigma$. Como la acción de $\mathcal{I}(M)$ en M es continua, se tiene que $\sigma_i.p \rightarrow \sigma.p = q$. Por lo tanto $q \in \text{cl}(\mathcal{O}_H(p))$.

Si H es conexo y abeliano, entonces $\text{cl}(H)$ es compacta, conexa y abeliana y por lo tanto isomorfa a un toro \mathbb{T}^n . Ahora, para todo $p \in M$, $\text{cl}(H)$ actúa en $\mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$ por isometrías y transitivamente, por lo que usando la Proposición 4.3.2, $\mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$ es o bien un punto o un toro plano encajado.

Finalmente, si $q \in \mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$, entonces existe $\sigma_i \in H$ tal que $\sigma_i.p \rightarrow q$, por lo que $\sigma_i^{-1}.q \rightarrow p$. Por lo tanto, $p \in \text{cl}(\mathcal{O}_H(q)) = \mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(q)$ y entonces $\mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p) \subset \mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(q) \subset \mathcal{O}_{\text{cl}(H)}(p)$. \square

Teorema 4.3.4 (Teo. 2.4, [8]). *Sea (M, g) una 3-variedad Riemanniana suave, compacta y conexa. Supongamos que K es un campo de Killing no nulo en todo punto. Entonces se cumple una de las siguientes:*

- (I) *toda órbita es cerrada, o,*
- (II) *existen solo dos órbitas cerradas, y toda otra órbita es densa en un 2-toro encajado, o,*
- (III) *toda órbita es densa en un 2-toro encajado, o,*
- (IV) *toda órbita es densa en M .*

Demostración. Sea H el grupo abeliano conexo generado por K . Definimos $G := \text{cl}(H)$, que sabemos que es isomorfo a \mathbb{T}^n para algún $n \geq 1$. Considerando la acción de G en M , nos encontramos en las hipótesis del Teorema 4.2.2. Además, como K no tiene ceros, toda G -órbita tiene dimensión al menos uno en M .

Si la dimensión de las G -órbitas principales es uno, todas las G -órbitas tienen dimensión uno y son difeomorfas a \mathbb{S}^1 . Por lo tanto las H -órbitas son cerradas y estamos en el caso (I).

Si la dimensión de las G -órbitas principales es dos, entonces el Teorema 4.2.2 nos asegura que M_{princ}/G es una 1-variedad conexa, y por lo tanto difeomorfa a $(0, 1)$ o a \mathbb{S}^1 . Además, es densa

en M/G . Por otro lado, usando la Proposición 4.3.3 las fibras principales son 2-toros. Si M_{princ}/G es difeomorfa a \mathbb{S}^1 entonces cada G -órbita es principal, y por lo tanto toda H -órbita es densa en un 2-toro, y estamos en el caso (III).

Supongamos que M_{princ}/G es difeomorfa a $(0, 1)$. Veremos que en este caso toda órbita no principal debe ser difeomorfa a \mathbb{S}^1 (y por lo tanto singular) y debe haber exactamente dos de ellas. Supongamos que $\mathcal{O}_G(p)$ es una G -órbita excepcional. Usando la Proposición 4.3.3, observamos que $\mathcal{O}_G(p)$ es un 2-toro encajado en M . En particular, se puede tomar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño de forma que el conjunto de puntos a distancia ϵ de la órbita $\mathcal{O}_G(p)$ son dos 2-toros encajados, T_ϵ y $T_{-\epsilon}$, uno a cada lado de $\mathcal{O}_G(p)$. Asumimos que, además, ϵ es elegido de forma que uno de los toros contiene un punto q cuya G -órbita es principal (podemos hacerlo pues M_{princ} es abierto y denso). Entonces, una tal órbita debe ser T_ϵ o $T_{-\epsilon}$ dado que $T_\epsilon \cup T_{-\epsilon}$ es preservada bajo la acción por isometrías de G , y G es conexo. Podemos asumir entonces que T_ϵ es principal. Sea γ un segmento geodésico minimizante entre $\mathcal{O}_G(p)$ y T_ϵ , comenzando en un punto $r \in \mathcal{O}_G(p)$ (que sin pérdida de generalidad podemos asumir $r = p$) y terminando en $s_\epsilon \in T_\epsilon$. Como $\mathcal{O}_G(p)$ no es principal, la representación de sección de p no es trivial, y por lo tanto existe un $g \in G_p$ que induce una isometría no trivial $d(\phi_g)_p : \nu_p \mathcal{O}_G(p) \rightarrow \nu_p \mathcal{O}_G(p)$. Como $\nu_p \mathcal{O}_G(p) \sim \mathbb{R}$, debe ser $d(\phi_g)_p = -\text{id}$. La acción de $g \in G$ induce entonces un mapa que envía $\gamma'(0)$ a $-\gamma'(0)$, y por lo tanto g envía s_ϵ a $s_{-\epsilon} \in T_{-\epsilon}$. Entonces, T_ϵ no puede ser una G -órbita, llegando a una contradicción. Esto implica que toda órbita no principal es singular y por lo tanto difeomorfa al círculo \mathbb{S}^1 . Veamos ahora que debe haber exactamente dos de ellas.

Sea $\mathcal{O}_G(p)$ una órbita difeomorfa a \mathbb{S}^1 . Sea $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ el conjunto de puntos a distancia ϵ de $\mathcal{O}_G(p)$ es un 2-toro encajado T_ϵ . Supongamos que ϵ_0 es tal que T_{ϵ_0} es principal. Entonces, para todo $0 < \delta < \epsilon_0$ sea γ una geodésica minimizante entre T_{ϵ_0} y $T_{\epsilon_0 - \delta}$, empezando en $r \in T_{\epsilon_0}$ y terminando en $s \in T_\epsilon$. A medida que el punto r recorre T_{ϵ_0} bajo la acción de G , el punto s recorre T_ϵ . Por lo tanto, la órbita de s es 2-dimensional y entonces es principal. Se sigue que cerca de $\mathcal{O}_G(p)$ toda órbita es principal. En particular, el cociente por G del ϵ_0 -entorno tubular $\text{Tub}(\mathcal{O}_G(p))$ es naturalmente difeomorfo a $[0, \epsilon_0)$. Concluimos que M/G debe ser difeomorfo a $[0, 1]$ y que hay únicamente dos órbitas singulares por la compacidad de M , una en $\{0\}$ y la otra en $\{1\}$. Estamos entonces en el caso (II).

Si la dimensión de las G -órbitas principales es tres, M_{princ}/G es una variedad conexa de dimensión cero y por lo tanto debe ser un punto, $M_{\text{princ}}/G = \{p\}$. Como M_{princ}/G es densa en M/G , se sigue que $M/G = M_{\text{princ}}/G = \{p\}$ y por lo tanto toda H -órbita es densa por la Proposición 4.3.3. Estamos entonces en el caso (IV). \square

Como consecuencia de los argumentos expuestos en la prueba, la topología de estos espacios queda clasificada inmediatamente. Para la definición de variedad de Seifert, espacio lenticular y fibrado por toros ver por ejemplo [44].

Corolario 4.3.5. *Bajo las hipótesis y notación del Teorema 4.3.4, se obtiene la siguiente clasificación,*

(I') *Si se cumple (I), M es una variedad de Seifert.*

(II') Si se cumple (II), M es un espacio lenticular.

(III') Si se cumple (III), M es un fibrado por toros \mathbb{T}^2 sobre \mathbb{S}^1 ,

(IV') Si se cumple (IV), M es un 3-toro \mathbb{T}^3 .

Demostración. Los casos para los que se cumplen (I) y (III) son inmediatos. Si se cumple (IV), la Proposición 4.3.3 aplicada a $\text{cl}(H)$ donde H es el grupo abeliano conexo generado por K implica que M es un toro \mathbb{T}^3 . Finalmente, si se cumple (II), M debe ser el pegado de dos toros sólidos $\pi^{-1}([0, 1/2])$ y $\pi^{-1}([1/2, 1])$ por sus bordes y por lo tanto es un espacio lenticular. \square

Capítulo 5

Clasificación de los horizontes de Cauchy cosmológicos

En este capítulo demostraremos la clasificación topológica y nulo-orbital de los horizontes de Cauchy compactos anunciada en la Introducción. Concluimos este trabajo caracterizando los espacio-tiempos que presentan horizontes de Cauchy ergódicos.

5.1. Simetrías nulas de horizontes de Cauchy cosmológicos

De aquí al final del capítulo, (M, \bar{g}) indicará un espacio-tiempo vacío, suave y 3+1-dimensional, de manera que su región globalmente hiperbólica \mathcal{H} admite una hipersuperficie de Cauchy compacta Σ y está acotada por un horizonte de Cauchy compacto, conexo y no degenerado \mathcal{C} , que asumiremos futuro. Asumimos además que \mathcal{C} divide a M en dos componentes conexas,

$$M \setminus \mathcal{C} = \mathcal{I} \sqcup \mathcal{H}.$$

Por el Teorema 2.4.2, \mathcal{C} es una hipersuperficie nula suave y totalmente geodésica. Por otro lado, el Teorema 2.4.5 nos permite considerar un campo K tangente al horizonte, nulo y sin ceros tal que,

$$\nabla_K K = -K. \quad (5.1.1)$$

Como \mathcal{C} es totalmente geodésico, el Teorema 2.2.4 asegura que para todo par de campos X, Y tangentes a \mathcal{C} se debe cumplir

$$\bar{g}(\nabla_X K, Y) = B(X, Y) = 0, \quad (5.1.2)$$

es decir, $\nabla_X K$ debe ser colineal con K . Esta observación nos permite definir una 1-forma ω_K en \mathcal{C} como,

$$\omega_K(X)K := \nabla_X K. \quad (5.1.3)$$

Proposición 5.1.1. *La 1-forma ω_K es cerrada nula, es decir,*

$$d\omega_K(K, \cdot) = 0.$$

Demostración. La demostración original de este hecho se debe a Isenberg-Moncrief y puede encontrarse en [Sec. E, [33]]. En el apéndice A.3 damos una prueba en su versión invariante, debida a Petersen. \square

Además, notamos que K es una simetría nula del horizonte de Cauchy.

Proposición 5.1.2. *El campo nulo K en \mathcal{C} es una simetría para la métrica degenerada $h := \bar{g}|_{\mathcal{C}}$, es decir, $\mathcal{L}_K h = 0$.*

Demostración. Sean X e Y campos tangentes al horizonte. Calculamos,

$$\mathcal{L}_Z h(X, Y) = \bar{g}(\nabla_X K, Y) + \bar{g}(X, \nabla_Y K) = 0, \quad (5.1.4)$$

donde usamos (5.1.2). \square

Definimos ahora un 2-tensor simétrico σ en \mathcal{C} por,

$$\sigma := h + \omega_K \otimes \omega_K. \quad (5.1.5)$$

Por construcción, σ es una métrica Riemanniana en \mathcal{C} . Veamos que esta métrica presenta la misma simetría K que la métrica degenerada h . Este hecho fue observado por Petersen y puede encontrarse en [Teo. 1.14, [37]]. A continuación damos una prueba más corta usando la fórmula de Cartan.

Proposición 5.1.3 (Petersen). *El campo vectorial K es un campo de Killing de (\mathcal{C}, σ) .*

Demostración. Sean X e Y campos en \mathcal{C} . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K \sigma(X, Y) &= \mathcal{L}_K h(X, Y) + \mathcal{L}_K (\omega_K \otimes \omega_K)(X, Y) \\ &= [\mathcal{L}_K \omega_K \otimes \omega_K](X, Y) + [\omega_K \otimes \mathcal{L}_K \omega_K](X, Y) \\ &= \left[((\iota_K \circ d)\omega_K + (d \circ \iota_K)\omega_K) \otimes \omega_K + \omega_K \otimes ((\iota_K \circ d)\omega_K + (d \circ \iota_K)\omega_K) \right](X, Y) \\ &= [d\omega_K(K, X) + d(\omega_K(K))(X)]\omega_K(Y) + \omega_K(X)[d\omega_K(K, Y) + d(\omega_K(K))(Y)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

donde la segunda igualdad se sigue de la Proposición 5.1.2 y la última igualdad de las propiedades de la 1-forma ω_K y la Proposición 5.1.1. \square

Considerando ahora la 3-variedad Riemanniana (\mathcal{C}, σ) , podemos aplicar los resultados del Capítulo 5.

Teorema 5.1.4 (Clasificación orbital de los horizontes de Cauchy compactos). *Sea \mathcal{C} un horizonte de Cauchy compacto y no degenerado en un espacio-tiempo $3 + 1$ -dimensional, vacío y suave. Entonces se cumple uno de los siguientes:*

- (I) *todos los generadores son cerrados, o,*

- (II) solo hay dos generadores cerrados, y los otros generadores son densos en 2-toros, o,
- (III) todo generador es denso en un 2-toro, o,
- (IV) todo generador es denso en el horizonte.

Demostración. Sea σ la métrica Riemanniana en \mathcal{C} definida por (5.1.5). Entonces (\mathcal{C}, σ) es una 3-variedad Riemanniana suave, compacta y conexa. La Proposición 5.1.3 muestra que (\mathcal{C}, σ) admite un campo de Killing K en la dirección de los generadores de \mathcal{C} que no se anula en ningún punto y por lo tanto estamos en las hipótesis del Teorema 4.3.4, de donde se sigue el resultado. \square

Aplicando el Corolario 4.3.5, obtenemos además una clasificación topológica de estos horizontes.

Corolario 5.1.5 (Clasificación topológica de los horizontes de Cauchy compactos). *Sea \mathcal{C} un horizonte de Cauchy compacto y no degenerado en un espacio-tiempo $3 + 1$ -dimensional, vacío y suave. Entonces, respectivamente a los casos (I)-(IV) en el Teorema 5.1.4, se tiene que,*

- (I) si se cumple (I), \mathcal{C} es una variedad de Seifert,
- (II) si se cumple (II), \mathcal{C} es un espacio lenticular,
- (III) si se cumple (III), \mathcal{C} es un fibrado por toros \mathbb{T}^2 sobre \mathbb{S}^1 ,
- (IV) si se cumple (IV), \mathcal{C} es un 3-toro \mathbb{T}^3 .

5.2. El espacio de Kasner

Resta probar la clasificación de los espacio-tiempos que presentan horizontes de Cauchy ergódicos. Para esto, será útil clasificar los datos iniciales sobre \mathbb{R}^3 con métrica y curvatura extrínseca invariantes por traslaciones. Una discusión (con un enfoque diferente y más general que el que presentamos a continuación) acerca de la clasificación de datos iniciales en grupos de Lie puede encontrarse en [43].

Teorema 5.2.1. *Sea $(\mathbb{R}^3, g, \mathcal{K})$ un dato inicial vacío, donde consideramos a \mathbb{R}^3 con su estructura de grupo de Lie dada por la suma. Supongamos además que g y \mathcal{K} son invariantes por traslaciones en \mathbb{R}^3 . Entonces el desarrollo globalmente hiperbólico $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \bar{g})$ será:*

1. la métrica de Minkowski,

$$\bar{g} = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2. \quad (5.2.1)$$

o,

2. una métrica de Kasner,

$$\bar{g} = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 t^{2p_i} dx_i^2, \quad (5.2.2)$$

donde las constantes p_i satisfacen

$$\sum_{i=1}^3 p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1, \quad (5.2.3)$$

y forman una familia uniparamétrica de soluciones. Las 1-formas dx_i son las duales la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Demostración. Notamos que las simetrías del dato inicial nos permiten escribir la métrica como

$$\bar{g} = -dt^2 + g_t,$$

donde g_t es una familia de métricas en \mathbb{R}^3 (ver [Sec. 20.1, [43]]). Dado $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$, denotamos por $g(t, x)$ y $\mathcal{K}(t, x)$ a la métrica y la segunda forma fundamental en (t, x) respectivamente (notar que no es una evaluación de vectores, sino que indica la evaluación de g en el punto (t, x)). Consideramos $\{\tilde{e}_i(t)\}$ una base canónica de $T_0\mathbb{R}^3$ que diagonaliza simultáneamente a $g(t, 0)$ y $\mathcal{K}(t, 0)$ (ver [Cor. 19.14, [43]]). Comenzamos estudiando la evolución de g y \mathcal{K} en $T_0\mathbb{R}^3$, es decir, la evolución de las formas bilineales simétricas $g(t, 0)$ y $\mathcal{K}(t, 0)$ en $T_0\mathbb{R}^3$.

Como estamos considerando \mathbb{R}^3 con su estructura de grupo de Lie, se sigue que $\text{Ric} = 0$ y $R = 0$ (ver [Lema 19.11, [43]]). Entonces, la restricción en la energía dada en (1.2.6) implica,

$$|\mathcal{K}|^2 = (\text{tr } \mathcal{K})^2. \quad (5.2.4)$$

Por otro lado, un cálculo directo (ver [Ap. B, [43]]) resulta en la ecuación de Ricatti,

$$\overline{\text{Ric}}(\partial_t, \partial_t) = (\text{tr } \mathcal{K})' - |\mathcal{K}|^2, \quad (5.2.5)$$

donde $\overline{\text{Ric}}$ es la curvatura del espacio-tiempo. Como $\overline{\text{Ric}}(\partial_t, \partial_t) = 0$, combinando esta ecuación con (5.2.4), se obtiene,

$$(\text{tr } \mathcal{K})' = (\text{tr } \mathcal{K})^2. \quad (5.2.6)$$

Escribiendo la condición inicial para la curvatura media,

$$\text{tr}(\mathcal{K}(t_0, 0)) = \text{tr}(\mathcal{K}_0) =: k_0, \quad (5.2.7)$$

tenemos dos posibilidades:

$$\text{tr}(\mathcal{K}(t, 0)) = 0 \text{ o } \text{tr}(\mathcal{K}(t, 0)) = -\frac{1}{t-a}, \quad (5.2.8)$$

donde $a = 1/k_0 + t_0$. La segunda función tiene una singularidad en el tiempo a , que depende del signo de k_0 . Aplicando una traslación en el tiempo podemos asumir $a = 0$ sin pérdida de generalidad, especificando si consideramos $t < 0$ o $t > 0$.

Supongamos que $\text{tr}(\mathcal{K}(t, 0)) = -\frac{1}{t}$. En la base $\{\tilde{e}_i(t)\}$, las representaciones matriciales de la métrica g y la segunda forma fundamental \mathcal{K} son,

$$g(t, 0) = \begin{pmatrix} G_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & G_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & G_3(t) \end{pmatrix} \text{ y } \mathcal{K}(t, 0) = \begin{pmatrix} K_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & K_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & K_3(t) \end{pmatrix}. \quad (5.2.9)$$

En particular, en esta base la inversa está dada por las entradas inversas. Usando (1.2.5) y la ecuación de Gauss para dos vectores horizontales en \mathbb{R}^3 junto con la condición $\overline{\text{Ric}} = 0$ el sistema a resolver se lee,

$$\begin{cases} g' = -2\mathcal{K}, \\ \mathcal{K}' = (\text{tr } \mathcal{K})\mathcal{K} - 2\mathcal{S}^2, \end{cases} \quad (5.2.10)$$

donde $\mathcal{S}^2(X, Y) = g(\nabla_X \partial_t, \nabla_Y \partial_t)$. En la base elegida, el sistema queda dado por

$$\begin{cases} G'_i = -2K_i, \\ K'_i = \text{tr}(\mathcal{K})K_i - 2G_i^{-1}K_i^2, \end{cases} \quad (5.2.11)$$

para $i = 1, 2, 3$. La derivada de la función inversa es

$$(G_i^{-1})' = -G_i^{-2}G'_i. \quad (5.2.12)$$

Consideramos ahora la cantidad $G_i^{-1}K_i$. Usando las ecuaciones (5.2.11) y (5.2.12), se tiene

$$\begin{aligned} (G_i^{-1}K_i)' &= (G_i^{-1})'K_i + G_i^{-1}K'_i \\ &= -G_i^{-2}G'_iK_i + G_i^{-1}(\text{tr}(\mathcal{K})K_i - 2G_i^{-1}K_i^2) \\ &= 2G_i^{-2}K_i^2 + \text{tr}(\mathcal{K})G_i^{-1}K_i - 2G_i^{-2}K_i^2 \\ &= \text{tr}(\mathcal{K})G_i^{-1}K_i. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Con $\text{tr}(\mathcal{K}) = -\frac{1}{t}$, encontramos que

$$\frac{d}{dt}(G_i^{-1}K_i) = -\frac{1}{t}G_i^{-1}K_i, \quad (5.2.14)$$

por lo que existen constantes $s_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, 3$ tales que

$$G_i^{-1}K_i = \frac{s_i}{t}. \quad (5.2.15)$$

Usando la primera ecuación del flujo, esto equivale a

$$G'_i = -\frac{2s_i}{t}G_i, \quad (5.2.16)$$

y finalmente, obtenemos,

$$G_i = c_{i+}t^{-2s_i}, \quad t > 0, \quad (5.2.17)$$

$$G_i = c_{i-}(-t)^{-2s_i}, \quad t < 0, \quad (5.2.18)$$

con constantes $c_{i+}, c_{i-} \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ si y solo si $\text{tr}(\mathcal{K}) < 0$. La segunda forma fundamental queda,

$$K_i = -\frac{1}{2}G'_i = c_{i+}s_i t^{-2s_i-1}, \quad t > 0, \quad (5.2.19)$$

$$K_i = -\frac{1}{2}G'_i = -c_{i-}s_i(-t)^{-2s_i-1}, \quad t < 0. \quad (5.2.20)$$

Las constantes s_i y c_i están sujetas a restricciones: para la curvatura media se tiene,

$$-\frac{1}{t} = \text{tr}(\mathcal{K}) = \sum_{i=1}^3 G_i^{-1} K_i = \sum_{i=1}^3 \frac{s_i}{t}, \quad (5.2.21)$$

que vale en ambos casos y por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^3 s_i = -1. \quad (5.2.22)$$

En estas coordenadas, la restricción en la energía (5.2.4) se escribe,

$$\sum_{i=1}^3 G_i^{-2} \mathcal{K}_i^2 = \left(\sum_{i=1}^3 G_i^{-1} \mathcal{K}_i \right)^2, \quad (5.2.23)$$

que en términos de s_i es equivalente a,

$$\sum_{i=1}^3 s_i^2 = \left(\sum_{i=1}^3 s_i \right)^2. \quad (5.2.24)$$

Podemos reescalar la base sin perder la diagonalización simultánea para la métrica y la forma fundamental. Elegimos entonces nuestra base $\{\tilde{e}_i\}$ de forma que sea ortonormal en $t = 1$ o $t = -1$, si $t > 0$ o $t < 0$ respectivamente. Haciendo esto, fijamos

$$1 = G_i(\pm 1) = c_{i\pm},$$

que es la última de las restricciones en estas constantes. Definimos finalmente $p_i := -s_i$ para obtener la expresión deseada. Obtenemos de esta manera los productos escalares en $T_{(t,0)}G$ dados por

$$\bar{g}(t, 0) = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 t^{2p_i} dx_i^2, \quad t > 0, \quad (5.2.25)$$

$$\bar{g}(t, 0) = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 (-t)^{2p_i} dx_i^2, \quad t < 0, \quad (5.2.26)$$

donde p_i cumple las restricciones previamente mencionadas, y dx_i denota las 1-formas duales a la base reescalada $\{\tilde{e}_i\}$. Observamos que estas dos métricas difieren únicamente por el cambio de coordenadas $t \mapsto -t$, por lo que podemos ignorar la segunda solución.

Estas métricas fueron construidas de forma que satisfacen las restricciones Hamiltonianas y la evolución 1.2.5. Un cálculo directo muestra que satisfacen las dos condiciones en 5.2.11. Esto

implica los espacios de Kasner son los únicos espacios en las hipótesis del teorema que satisfacen estas condiciones con $\text{tr}(\mathcal{K}(t, 0)) \neq 0$.

Para el caso $\text{tr}(\mathcal{K}(t, 0)) = 0$, usamos nuevamente la base que diagonaliza $g(t, 0)$ y $\mathcal{K}(t, 0)$ simultáneamente para todo tiempo. La cantidad $G_i^{-1}K_i$ satisface ahora,

$$(G_i^{-1}K_i)' = \text{tr}(\mathcal{K})G_i^{-1}K_i = 0, \quad (5.2.27)$$

y por lo tanto, $G_i^{-1}K_i = q_i$ con constantes $q_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$. Usando que la evolución de G_i está dada por (5.2.11), esto es equivalente a $G_i' = -2q_iG_i$, de donde se sigue que

$$G_i = d_i e^{-2q_i t}, \quad (5.2.28)$$

donde $d_i \in \mathbb{R}$, y nuevamente por (5.2.11), obtenemos

$$K_i = d_i q_i e^{-2q_i t}. \quad (5.2.29)$$

Como la curvatura media se anula,

$$0 = \text{tr}(\mathcal{K}) = \sum_{i=1}^3 G_i^{-1}K_i = \sum_{i=1}^3 q_i. \quad (5.2.30)$$

La restricción en la energía (5.2.4) implica,

$$\sum_{i=1}^3 G_i^{-2}K_i^2 = \left(\sum_{i=1}^3 G_i^{-1}K_i \right)^2, \quad (5.2.31)$$

que por (5.2.30) se simplifica a,

$$0 = \left(\sum_{i=1}^3 G_i^{-1}K_i \right)^2 = \sum_{i=1}^3 q_i^2, \quad (5.2.32)$$

y por lo tanto $q_i = 0$ para todo i , lo que en particular implica que la segunda forma fundamental se anula. Tomando la base ortonormal en $t = 0$ (y por lo tanto en todo t), nos fija

$$1 = G_i(0) = d_i, \quad (5.2.33)$$

y obtenemos la métrica de Minkowski,

$$\bar{g}(t, 0) = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2. \quad (5.2.34)$$

Como la segunda forma fundamental se anula, las restricciones Hamiltonianas (1.2.6) también se satisfacen, por lo que el espacio de Minkowski es una solución al problema de valores iniciales. Finalmente, como estamos trabajando en \mathbb{R}^3 con la suma, todos los espacios tangentes se identifican trivialmente y usando la invariancia por traslaciones obtenemos fórmulas idénticas en todo punto de \mathbb{R}^3 . \square

Estaremos particularmente interesados en el espacio de Kasner plano, que definimos a continuación.

Definición 5.2.1. El *espacio de Kasner plano* es,

$$\bar{g} = -dt^2 + t^2 dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (t, x, y, z) \in (0, \infty)_t \times \mathbb{R}_{x,y,z}^3. \quad (5.2.35)$$

o una permutación de x, y, z en la expresión anterior. Observamos que tomando un cociente de \mathbb{R}^3 por retículos de dimensión 3 obtenemos espacios de Kasner planos cosmológicos.

El espacio de Kasner plano puede escribirse como $(N \times S, g + h)$, donde $(N = \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x, g)$ es el cubrimiento del espacio de Misner y (S, h) es el plano $\mathbb{R}_{y,z}^2$ con su métrica plana. En particular, se sigue que la curvatura de Riemann del espacio de Kasner plano es idénticamente cero. La discusión del Capítulo 3 implica además que este espacio presenta una singularidad en el sentido de incompletitud de geodésicas causales que no es una singularidad de curvatura, dado que el espacio de Misner admite una extensión sin singularidades de curvatura. Esta observación, sumada a la existencia de singularidades de curvatura para geodésicas causales en los otros espacios de Kasner, resultan en el siguiente teorema.

Teorema 5.2.2. *En las condiciones del Teorema 5.2.1, el único espacio que admite un horizonte de Cauchy es el espacio de Kasner plano.*

Demostración. Ver [Teo. 24.12, [43]]. □

5.3. Caracterización de los espacio-tiempos cosmológicos con horizontes ergódicos

Consideramos nuevamente un horizonte de Cauchy \mathcal{C} en un espacio tiempo (M, \bar{g}) , con K y ω_K definidos como en la Sección 6.1. Observamos que la propiedad (5.1.1) que caracteriza al campo K nos asegura que $\omega_K(K) = -1$, y por lo tanto ω_K no se anula en ningún punto de \mathcal{C} . Si $E := \ker(\omega_K)$, se sigue que E es un fibrado vectorial y obtenemos una descomposición del fibrado tangente del horizonte,

$$T\mathcal{C} = \mathbb{R}K \oplus E. \quad (5.3.1)$$

Observamos además que la restricción de \bar{g} al fibrado vectorial E es definida positiva. Usaremos este fibrado para obtener coordenadas en un entorno del horizonte dentro de la región globalmente hiperbólica de M .

Proposición 5.3.1 (Petersen [37]). *Existe un entorno abierto (futuro si \mathcal{C} es un horizonte pasado y pasado en caso contrario) $U \subset \mathcal{C} \sqcup D(\Sigma)$ que contiene a \mathcal{C} y una función suave $t : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(U, \bar{g}|_U)$ es isométrico a*

$$[0, \epsilon) \times \mathcal{C},$$

donde t es la coordenada en $[0, \epsilon)$ y la métrica se escribe,

$$\bar{g}|_U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\psi & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{g} \end{pmatrix}, \quad (5.3.2)$$

con respecto a la descomposición

$$T([0, \epsilon) \times \mathcal{C}) = \mathbb{R}\partial_t \oplus \mathbb{R}\text{grad}(t) \oplus E.$$

La función $\psi \in C^\infty([0, \epsilon) \times \mathcal{C})$ es tal que $\partial_t \psi(t, \cdot) > 0$ y $\psi(t, \cdot) > 0$ para todo $t \in (0, \epsilon)$ y $\partial_t \psi(0, \cdot) = 2$, $\psi(0, \cdot) = 0$ y la métrica inducida dependiente del tiempo \tilde{g} en el fibrado vectorial E es definida positiva. Más aún, ∂_t es un campo vectorial geodésico nulo y $\{t\} \times \mathcal{C}$ son hipersuperficies de Cauchy espaciales en $D(\Sigma)$ para todo $t \in (0, \epsilon)$, y en particular, difeomorfas a Σ .

Notamos que la función t es una generalización natural de la función de tiempo nula que aparece en espacio de Misner al considerar las geodésicas verticales. En particular, esta proposición muestra que podemos ver a los horizontes de Cauchy compactos y no degenerados como una hoja de una foliación donde el horizonte es localmente la única hoja con métrica degenerada.

Antes de probar la proposición, es pertinente hacer algunas observaciones: como ∂_t es nulo y $\bar{g}(\text{grad}(t), \partial_t) = 1$, se sigue que ∂_t y $\text{grad}(t)$ son linealmente independientes. Esto explica la descomposición $T([0, \epsilon) \times \mathcal{C}) = \mathbb{R}\partial_t \oplus \mathbb{R}\text{grad}(t) \oplus E$. Definamos,

$$\mathcal{C}_t := \{t\} \times \mathcal{C} \subset [0, \epsilon) \times \mathcal{C},$$

para todo $t \in [0, \epsilon)$. El teorema nos brinda entonces un difeomorfismo canónico entre el horizonte dado por \mathcal{C}_0 y las hipersuperficies de Cauchy \mathcal{C}_t para $t \in (0, \epsilon)$. Considerando $E \subset T\mathcal{C}_t$ como subfibrado de la forma canónica, extendemos también el campo K como un campo suave y $K \in T\mathcal{C}_t$ para todo $t \in [0, \epsilon)$, mediante la ecuación $[K, \partial_t] = 0$. Se sigue que

$$T\mathcal{C}_t = \mathbb{R}K \oplus E|_{\mathcal{C}_t},$$

para todo $t \in [0, \epsilon)$.

Demostración de la Proposición 5.3.1. Sea K el campo nulo dirigido a futuro tal que $\nabla_K K = -K$. Podemos reparametrizar las curvas de K a geodésicas tangentes a K y, como \mathcal{C} es un horizonte futuro, las propiedades del campo K y el Teorema 2.4.2 aseguran que éstas serán completas en la dirección negativa e incompletas en la dirección positiva. Como $E \subset TM|_{\mathcal{C}}$ es un subfibrado Riemanniano, se sigue que $T\mathcal{C} = E \oplus E^\perp$. Usando la orientabilidad temporal de M , consideramos ahora un campo temporal T no nulo en M dirigido a futuro. Como \mathcal{C} es nulo, $T|_{\mathcal{C}}$ es transversal a \mathcal{C} . Proyectando $T|_{\mathcal{C}}$ a E^\perp , obtenemos un campo $\bar{T}|_{\mathcal{C}}$ no nulo y linealmente independiente de K . Como E^\perp es un subfibrado de rango 2 y $K \in E^\perp$, E^\perp debe ser un fibrado trivial generado por K y $\bar{T}|_{\mathcal{C}}$. Como además E^\perp es un subfibrado Lorentziano, concluimos que existe un único campo nulo dirigido a pasado $L \in E^\perp$ tal que $\bar{g}(L, K) = 1$.

Siguiendo las geodésicas nulas de L , consideremos ahora el mapa $f_s : \mathcal{C} \rightarrow M$, dado por $x \mapsto \exp_x(Ls)$, para aquellos $s \in \mathbb{R}$ sobre los cuales esté definido. Usando la compacidad de \mathcal{C} , existe un $\epsilon > 0$ uniforme tal que f_s está definido para todo $s \in [0, \epsilon)$ y tal que el mapa $\hat{f} : [0, \epsilon) \times \mathcal{C} \rightarrow M$ dado por $(s, x) \mapsto f_s(x)$ es un difeomorfismo a su imagen.

Mostramos ahora que podemos achicar ϵ de forma que $\hat{f}([0, \epsilon) \times \mathcal{C}) \subset D(\Sigma)$: para cada $x \in \mathcal{C}$, la curva $s \mapsto f_s(x)$ es nula y dirigida a pasado. Como $\mathcal{C} \sqcup D(\Sigma)$ es una variedad suave con borde \mathcal{C} y L es transversal en \mathcal{C} , o bien $f_s(x) \in D(\Sigma)$ para todo s negativo cerca de cero o para todo s positivo cerca de cero. Supongamos que ocurre para todo s negativo cerca de cero. Se sigue por continuidad que hay una curva dirigida a futuro y temporal γ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(s') \in D(\Sigma)$ para todo s' negativo cerca de cero. Como $D(\Sigma)$ es globalmente hiperbólico, podemos extender γ a una curva temporal dirigida a futuro que intersecta Σ . Esto implica que $x \in \mathcal{I}^-(\Sigma)$. Por otro lado, usando la Proposición 1.3.1 obtenemos que $x \in \mathcal{C} \subset \mathcal{I}^+(\Sigma)$. Esto contradice la acausalidad de Σ y concluimos que $f_s(x) \in D(\Sigma)$ para s positivos pequeños. Se sigue de la compacidad de \mathcal{C} que podemos achicar ϵ tal que $\hat{f}([0, \epsilon) \times \mathcal{C}) \subset D(\Sigma)$. Definamos entonces $U := \hat{f}([0, \epsilon) \times \mathcal{C})$.

Denotamos la coordenada en $[0, \epsilon)$ por t . Por construcción, se sigue que $\nabla_{\partial_t} \partial_t = 0$, i.e., ∂_t es un campo vectorial geodésico. Por otro lado, como $\partial_t|_{\mathcal{C}} = L$, ∂_t es un campo vectorial nulo. Sea entonces $X \in E \subset T\mathcal{C}$, y extendamos X a $T([0, \epsilon) \times \mathcal{C})$ por $(0, X)$ (que denotaremos también X haciendo un pequeño abuso de notación). Se sigue inmediatamente que $[X, \partial_t] = 0$. Más aún, observamos que

$$\partial_t \bar{g}(\partial_t, X) = \bar{g}(\nabla_{\partial_t} \partial_t, X) + \bar{g}(\partial_t, \nabla_{\partial_t} X) = \bar{g}(\partial_t, \nabla_{\partial_t} X) = \frac{1}{2} \partial_X \bar{g}(\partial_t, \partial_t) = 0. \quad (5.3.3)$$

Como $\bar{g}(\partial_t, X)|_{\{0\} \times \mathcal{C}} = \bar{g}(L, X) = 0$, de (5.3.3) se sigue que $\bar{g}(\partial_t, X) = 0$ en $\hat{f}([0, \epsilon) \times \mathcal{C})$. Como $\text{grad}(t)|_{\{0\} \times \mathcal{C}} = K$, notamos que ∂_t y $\text{grad}(t)$ son linealmente independientes en $[0, \epsilon) \times \mathcal{C}$, achicando aún más ϵ de ser necesario. Más aún,

$$\bar{g}(\text{grad}(t), X) = dt(X) = \partial_X t = 0,$$

para todo $X \in E$ extendido como antes, y $\bar{g}(\text{grad}(t), \partial_t) = 1$ en todo punto. Esto implica que X, ∂_t y $\text{grad}(t)$ son linealmente independientes en todo punto. Mostramos entonces que

$$\begin{aligned} \bar{g}(\partial_t, \partial_t) &= 0, \\ \bar{g}(\partial_t, \text{grad}(t)) &= 1, \\ \bar{g}(\partial_t, X) &= 0, \\ \bar{g}(\text{grad}(t), X) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Definimos $\psi := -\bar{g}(\text{grad}(t), \text{grad}(t))$, lo que completa la forma de la métrica definida en (5.3.2). Como $\text{grad}(t)|_{\{0\} \times \mathcal{C}} = K$, se sigue que $\psi(0, \cdot) = -\bar{g}(K, K) = 0$. Para calcular $\partial_t \psi(0, \cdot)$, extendemos primero K por $(0, K)$ y lo denotamos nuevamente por K . Se tiene entonces que $[K, \partial_t] = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(0, \cdot) &= -2\bar{g}(\nabla_{\partial_t} \text{grad}(t), K)|_{\{0\} \times \mathcal{C}} \\ &= -2\partial_t \bar{g}(\text{grad}(t), K)|_{\{0\} \times \mathcal{C}} + 2\bar{g}(K, \nabla_{\partial_t} K)|_{\{0\} \times \mathcal{C}} \\ &= 2\bar{g}(K, \nabla_K \partial_t)|_{\{0\} \times \mathcal{C}} = -2\bar{g}(\nabla_K K, \partial_t)|_{\{0\} \times \mathcal{C}} = 2, \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Donde usamos que $[K, \partial_t] = 0$ para pasar de la segunda a la tercer línea. Achicando nuevamente ϵ de ser necesario, podemos suponer que $\partial_t \psi(0, \cdot) > 0$ para todo $t \in [0, \epsilon)$, y $\psi(t, \cdot) > 0$ para $t \in (0, \epsilon)$.

Como $\psi > 0$, vemos que $\text{grad}(t)$ es temporal en $(0, \epsilon) \times \mathcal{C}$ y entonces las hipersuperficies $\{t\} \times \mathcal{C}$ son hipersuperficies espaciales compactas en la región globalmente hiperbólica $\mathcal{D}(\Sigma)$ del espacio-tiempo, para todo $t \in (0, \epsilon)$. Finalmente, un resultado de Budic-Isenberg-Lindblom-Yasskin [Teo. 1, [7]], muestra que los conjuntos de nivel $\{t\} \times \mathcal{C}$ son hipersuperficies de Cauchy para todo $t \in (0, \epsilon)$. \square

Es importante observar que el campo de Killing K definido como la extensión del campo K del horizonte en la proposición anterior coincide con el campo \tilde{K} del Teorema 2.4.3. Para ver esto notamos que, como se cumple $[\partial_t, \tilde{K}]|_{\mathcal{C}} = [\partial_t, K]|_{\mathcal{C}} = 0$, el campo nulo $\partial_t|_{\mathcal{C}}$ es invariante bajo la acción del grupo de isometrías a un parámetro φ_s generado por \tilde{K} . Como las geodésicas nulas $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ que emanan de los puntos de \mathcal{C} con tangente ∂_t están únicamente determinadas por la métrica φ_s -invariante \bar{g} en $[0, \epsilon) \times \mathcal{C}$, se sigue que el campo tangente ∂_t a estas geodésicas es también invariante, $d\varphi_s(\partial_t) = \partial_t$ en $[0, \epsilon) \times \mathcal{C}$. Esto muestra que $[\partial_t, \tilde{K}] = 0$ que, junto con $[\partial_t, K] = 0$ y $K|_{\mathcal{C}} = \tilde{K}|_{\mathcal{C}}$, implica que $K = \tilde{K}$. Como K es tangente a las hipersuperficies de Cauchy \mathcal{C}_t , también debe serlo \tilde{K} . En particular, las órbitas de $\tilde{K}|_{\mathcal{C}_t}$ permanecen en \mathcal{C}_t .

Corolario 5.3.2. *Sea \mathcal{C} un horizonte de Cauchy ergódico, compacto y no degenerado en un espacio-tiempo vacío $3 + 1$ -dimensional (M, g) . Entonces (M, g) es un cociente del espacio de Kasner plano.*

Demostración. Usando el Teorema 2.4.3, extendemos el campo K a un campo de Killing \tilde{K} para la métrica \bar{g} en la región globalmente hiperbólica de $M \setminus \mathcal{C}$. La observación anterior muestra que \tilde{K} es tangente a las hipersuperficies de Cauchy espaciales $\{t\} \times \mathcal{C}$ dadas por la Proposición 5.3.1. Fijamos un $s \in (0, \epsilon)$ cualquiera y denotamos $\mathcal{C}_s := \{s\} \times \mathcal{C}$ a la hipersuperficie de Cauchy espacial en $t = s$. Como $\tilde{K}|_{\mathcal{C}_s}$ es espacial y deja \mathcal{C}_s invariante, se sigue que $\tilde{K}|_{\mathcal{C}_s}$ es un campo de Killing para la métrica Riemanniana $g := \bar{g}|_{\mathcal{C}_s}$. Por construcción, si la acción de K tiene una órbita densa en \mathcal{C} , la acción de $\tilde{K}|_{\mathcal{C}_s}$ tiene una órbita densa en $\tilde{K}|_{\mathcal{C}_s}$. De este hecho deducimos que \mathbb{T}^3 actúa libre e isométricamente en (\mathcal{C}_s, g) y la Proposición 4.3.2 asegura que (\mathcal{C}_s, g) es un toro plano. Como la acción proviene de la simetría del espacio-tiempo inducida por \tilde{K} , el Teorema 1.2.3 de restricción de simetrías muestra que la segunda forma fundamental \mathcal{K} de \mathcal{C}_s es también invariante bajo la acción de \mathbb{T}^3 . Obtenemos así un dato inicial vacío y \mathbb{T}^3 -invariante $(\mathcal{C}_s \sim \mathbb{T}^3, g, \mathcal{K})$. El Teorema 5.2.1 implica que (M, \bar{g}) debe ser un espacio de Kasner y, como presenta un horizonte de Cauchy, el Teorema 5.2.2 asegura que debe ser el espacio de Kasner plano. \square

Apéndice

Apéndice A

Conceptos básicos de causalidad y demostraciones complementarias

A.1. Espacio de Minkowski

Sea V un espacio vectorial real n -dimensional. Un *producto escalar Lorentziano* en V es una forma bilineal simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no degenerada de índice 1. En particular, puede hallarse una base $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V tal que

$$\langle E_i, E_j \rangle = \begin{cases} -1, & \text{si } i = j = 1, \\ 1, & \text{si } i = j = 2, \dots, n, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

El ejemplo prototípico de producto escalar Lorentziano en \mathbb{R}^n es el *producto de Minkowski*, denotado η , dado por $\eta(X, Y) = -X^1Y^1 + X^2Y^2 + \dots + X^nY^n$, donde $X = (X^1, \dots, X^n)$, $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$. Este es el ejemplo básico, dado que de la definición anterior se sigue que todo espacio vectorial $n+1$ -dimensional con producto escalar (V, g) es isométrico al espacio de Minkowski (\mathbb{R}_1^n, η) .

Denotamos la forma cuadrática asociada a una forma bilineal b por,

$$Q : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(X) := b(X, X).$$

Definición A.1.1. Sea Q una forma cuadrática asociada a una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un vector $X \in (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se dice *temporal* si $Q(X) < 0$, *espacial* si $Q(X) > 0$ y *nulo* (o *lumínico*) si $Q(X) = 0$.

Si X es temporal o nulo, decimos que es *causal*. Si X es un vector nulo se tiene,

$$(X^1)^2 = (X^2)^2 + \dots + (X^n)^2,$$

y por lo tanto está en un cono. Este cono se conoce como el doble cono nulo. Observamos también que la estructura de los conos no depende del múltiplo de η elegido. Los vectores temporales

están en el interior del cono, que para $n \geq 2$ es desconexo. Denotando por $\mathcal{I}(0)$ a los vectores temporales, podemos elegir una orientación temporal en V , simplemente declarando que una de estas dos componentes es dirigida a futuro, o positiva. Llamando a esta componente $\mathcal{I}^+(0)$, sus elementos se dirán dirigidos a futuro. A partir de esta definición, definimos $\mathcal{J}^+(0) := \overline{\mathcal{I}^+(0)}$, $\mathcal{C}^+(0) := \partial\mathcal{I}^+(0)$, y denotando por $\mathcal{I}^-(0)$ la otra componente del cono, obtenemos las respectivas definiciones para el pasado.

A.2. Variedades Lorentzianas, orientación temporal y relaciones de causalidad

Definición A.2.1. Una *variedad Lorentziana* es un par (M, g) , donde M es una n -variedad y g es una métrica Lorentziana, es decir, g es una sección suave $g \in \Gamma(TM^* \otimes TM^*)$, tal que para todo $p \in M$, $g_p := g(p) \in T_p^*M \otimes T_p^*M$ es una forma binileal no degenerada de índice constante 1.

En coordenadas locales, dada $x = (x^1, \dots, x^n) : U \rightarrow V$, donde $U \subset M$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos, y para cualquier $i, j = 1, \dots, n$, las funciones $g_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $g_{ij} := g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ son suaves. De este modo, se escribe

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

que usando la notación de Einstein y omitiendo el símbolo de producto tensorial se denota $g = g_{ij} dx^i dx^j$.

Sea (M, g) una variedad Lorentziana de dimensión $n \geq 2$. Entonces, tal y como en el espacio de Minkowski, en cada punto $p \in M$ el conjunto de vectores temporales en el espacio tangente T_pM consiste de dos componentes conexas, indistinguibles entre sí intrínsecamente. Para resolver esto, fijamos una *orientación temporal*.

Definición A.2.2. Una orientación temporal en M es una elección $\mathcal{I}_p^+(0) \subset T_pM$ de una de estas componentes conexas, que depende continuamente de p .

Se tiene entonces la siguiente proposición.

Proposición A.2.1. (M, g) es orientable temporalmente si y solamente si existe un campo vectorial suave T en M , tal que $g(T, T) < 0$.

Definición A.2.3. Dada una variedad Lorentziana (M, g) , diremos que M es un *espacio-tiempo* si es temporalmente orientada, es decir, hay una elección de T dada.

Observación A.2.2. Toda variedad Lorentziana tiene un cubrimiento doble temporalmente orientable. Una prueba de esto puede encontrarse en [Teo. 4.1.2 [3]].

Observación A.2.3. Cabe notar que, en contraste con la noción de orientación de topología diferencial que sólo depende de la topología de la variedad subyacente, el concepto de orientabilidad temporal depende de la métrica Lorentziana.

Dado $p \in (M, g)$, podemos definir la forma cuadrática \mathcal{Q}_p asociada a la métrica g , donde si $X \in T_p M$,

$$\mathcal{Q}_p(X) = g(X, X).$$

Al igual que en el espacio de Minkowski, distinguiremos vectores temporales, causales, lumínicos, etc., según si \mathcal{Q}_p sea negativo, no positivo, nulo, etc.

Definición A.2.4. Una curva continua y C^1 a trozos en M se dice *temporal*, *lumínica*, *causal*, *espacial*, *dirigida a futuro* o *dirigida a pasado* si todos sus vectores tangentes son temporales, lumínicos, causales, espaciales, dirigidos a futuro o dirigidos a pasado, respectivamente. Diremos que una curva $\gamma : I \rightarrow M$ es extendible si existe una curva de C^1 a trozos $\eta : J \rightarrow M$ tal que $I \subsetneq J$ y $\eta|_I = \gamma$. Diremos que γ es *inextendible* si no es extendible.

Esto nos permite definir las siguientes relaciones de causalidad en M .

Definición A.2.5. Dados $p, q \in M$, decimos que:

- (i). $p \ll q$ si existe una curva temporal dirigida a futuro en M de p a q ,
- (ii). $p < q$ si existe una curva causal dirigida a futuro en M de p a q ,
- (iii). $p \leq q$ si $p < q$ o $p = q$.

Observamos que estas relaciones son transitivas, dado que si existe una curva causal (resp. temporal) en M uniendo p y q , y otra curva causal (resp. temporal) que une q y r , podemos unir las para obtener una curva C^1 a trozos causal (temporal) de p a r .

Definición A.2.6. El *futuro cronológico* $\mathcal{I}^+(x)$ de un punto $x \in M$ es el conjunto de puntos $y \in M$ para los cuales existe una curva temporal C^1 a trozos $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$,

$$\mathcal{I}^+(x) := \{y \in M : x \ll y\}.$$

Similarmente, el *futuro causal* $\mathcal{J}^+(x)$ de un punto $x \in M$ consiste de aquellos puntos $y \in M$ para los cuales existe una curva causal C^1 a trozos $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$,

$$\mathcal{J}^+(x) := \{y \in M : x \leq y\}.$$

En este caso, $x \in \mathcal{J}^+(x)$.

Estas dos definiciones nos permiten definir el futuro cronológico de un subconjunto $A \subset M$,

$$\mathcal{I}^+(A) := \bigcup_{x \in A} \mathcal{I}^+(x),$$

y el futuro causal de A ,

$$\mathcal{J}^+(A) := \bigcup_{x \in A} \mathcal{J}_+(x).$$

Análogamente se definen los *pasados cronológicos* $\mathcal{I}^-(x)$, $\mathcal{I}^-(A)$, así como los *pasados causales* $\mathcal{J}^-(x)$ y $\mathcal{J}^-(A)$, reemplazando curvas a futuro por curvas a pasado. También, para $A \subset M$, usaremos la notación

$$\mathcal{J}(A) = \mathcal{J}^+(A) \cup \mathcal{J}^-(A).$$

Observación A.2.4. Para todo $A \subset M$ se tienen las inclusiones $A \subset \mathcal{J}^+(A)$ y $A \cup \mathcal{I}^+(A) \subset \mathcal{J}^+(A)$.

Proposición A.2.5. *En un espacio-tiempo M la relación " \ll " es abierta, es decir, para todo $p, q \in M$, con $p \ll q$, existen entornos abiertos U y V de p y q respectivamente, tal que para todo $p' \in U$ y $q' \in V$, se tiene $p' \ll q'$.*

Corolario A.2.6. *Para todo $A \subset M$, el futuro cronológico $\mathcal{I}^+(A)$ y el pasado cronológico $\mathcal{I}^-(A)$ son conjuntos abiertos en M .*

Demostración. La proposición anterior muestra que para todo $p \in M$, $\mathcal{I}^+(p)$ es abierto, y por lo tanto $\mathcal{I}^+(A) = \bigcup_{p \in A} \mathcal{I}^+(p)$ es abierto en M . \square

A.3. Demostración de la Proposición 5.1.1

Para demostrar esta proposición, es necesario hacer algunas observaciones previas. Considerando primero el horizonte como subvariedad $(\mathcal{C}, h) \subset (M, g)$, como M es un espacio-tiempo tenemos que existe un campo temporal que no se anula \tilde{T} definido en M . Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $g(\tilde{T}, \tilde{T}) = -1$. Por otro lado, la signatura de h nos muestra que $\tilde{T}|_{\mathcal{C}}$ es un campo definido sobre \mathcal{C} transversal a \mathcal{C} . Como K es un vector nulo, debe ser $g(K, \tilde{T})_p \neq 0$ para todo $p \in \mathcal{C}$ (de lo contrario K sería espacial en algún punto de \mathcal{C}). Es sencillo probar además que si K es un campo nulo, podemos tomar T tal que $g(T, K)|_{\mathcal{C}} = -1$ y $g(\tilde{T}, \tilde{T})|_{\mathcal{C}} = -1$. Esta observación nos permite escribir la forma $\omega_K(X)$ dada por $\nabla_X K = \omega_K(X)K$ como

$$\omega_K(X) := -g(\nabla_X K, T)|_{\mathcal{C}}.$$

Por otro lado, si \bar{T} es otro campo temporal con las mismas propiedades, $g(\nabla_X K, T) = g(\nabla_X K, \bar{T})$, por lo que ω_K no depende del T elegido.

Calculamos en \mathcal{C} ,

$$\begin{aligned} d\omega_K(X, K) &= \partial_X \omega_K(K) - \partial_K \omega_K(X) - \omega_K([X, K]) \\ &= -g(\nabla_X \nabla_K K, T) - g(\nabla_K K, \nabla_X T) + g(\nabla_K \nabla_X K, T) \\ &\quad + g(\nabla_X K, \nabla_K T) + g(\nabla_{[X, K]} K, T) \\ &= R(K, X, K, T) + \omega_K(X)g(K, \nabla_K T) - \omega_K(K)g(K, \nabla_X T) \\ &= R(K, X, K, T) + \omega_K(X)g(K, \nabla_K T) - \omega_K(K)g(K, \nabla_X T). \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

Tomando $\{e_2, e_3\}$ una base ortonormal en $E \subset T\mathcal{C}$ tal que $g(e_i, T) = 0$ (que en particular implica que son linealmente independientes de K para todo i , y usando la que (M, g) es un espacio-tiempo vacío, obtenemos en \mathcal{C} ,

$$0 = \text{Ric}(X, K) = -R(K, X, K, T) + \sum_{i=2}^3 R(e_i, X, K, e_i).$$

Como \mathcal{C} es totalmente geodésico, $g(\nabla_V K, W) = 0$ para todo V, W en \mathcal{C} . Reescribiendo la curvatura obtenemos,

$$\begin{aligned} R(e_i, X, K, e_i) &= g(\nabla_{e_i} \nabla_X K, e_i) - g(\nabla_X \nabla_{e_i} K, e_i) - g(\nabla_{[e_i, X]} K, e_i) \\ &= \partial_{e_i} g(\nabla_X K, e_i) - g(\nabla_X K, \nabla_{e_i} e_i) - \partial_X g(\nabla_{e_i} K, e_i) + g(\nabla_{e_i} K, \nabla_X e_i) \quad (\text{A.3.2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego $R(K, X, K, T) = 0$. Expandiendo las expresiones obtenidas,

$$\begin{aligned} \omega_K(X)g(K, \nabla_K T) &= \omega_K(X)g(K, -g(\nabla_K T, T)K - g(\nabla_K T, K)T) + \sum_{i=2}^3 g(\nabla_K T, e_i)e_i \\ &= -\omega_K(K)g(\nabla_K T, K)g(K, T) \\ &= -\omega_K(X)g(T, \nabla_K K) \\ &= \omega_K(X)\omega_K(K) \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

y,

$$\begin{aligned} -\omega_K(K)g(K, \nabla_X T) &= -\omega_K(K)g(K, -g(\nabla_X T, T)K - g(\nabla_X T, K)T) + \sum_{i=2}^3 g(\nabla_X T, e_i)e_i \\ &= \omega_K(K)g(\nabla_X T, K)g(K, T) \\ &= \omega_K(K)g(T, \nabla_X K) \\ &= -\omega_K(K)\omega_K(X) \end{aligned} \quad (\text{A.3.4})$$

Uniendo lo anterior, obtenemos la igualdad deseada.

Bibliografía

- [1] Marcos M Alexandrino and Renato G Bettiol. *Lie groups and geometric aspects of isometric actions*, volume 8. Springer, 2015.
- [2] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W Misner. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 40(9):1997–2027, 2008.
- [3] JK Beem, PE Ehrlich, and KL Easley. *Global lorentzian geometry*. Inc. New York and Basel, 1996.
- [4] John K Beem and Andrzej Królak. Cauchy horizon end points and differentiability. *Journal of Mathematical Physics*, 39(11):6001–6010, 1998.
- [5] Robert Beig, Piotr T Chruściel, and Richard Schoen. Kids are non-generic. In *Annales Henri Poincaré*, volume 6, pages 155–194. Springer, 2005.
- [6] Antonio N Bernal and Miguel Sánchez. On smooth cauchy hypersurfaces and geroch’s splitting theorem. *arXiv preprint gr-qc/0306108*, 2003.
- [7] Robert Budic, James Isenberg, Lee Lindblom, and Philip B Yasskin. On the determination of cauchy surfaces from intrinsic properties. *Communications in Mathematical Physics*, 61(1):87–95, 1978.
- [8] Ignacio Bustamante and Martín Reiris. A classification theorem for compact Cauchy horizons in vacuum spacetimes. *arXiv preprint arXiv:2008.11926*, 2020.
- [9] Yvonne Choquet-Bruhat and Robert Geroch. Global aspects of the cauchy problem in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, 14(4):329–335, 1969.
- [10] Piotr T Chruściel and James Isenberg. Nonisometric vacuum extensions of vacuum maximal globally hyperbolic spacetimes. *Physical Review D*, 48(4):1616, 1993.
- [11] Piotr T. Chrusciel and Kayll Lake. Cauchy horizons in Gowdy space-times. *Class. Quant. Grav.*, 21:S153–S170, 2004.
- [12] Gregory J Galloway. Maximum principles for null hypersurfaces and null splitting theorems. *Ann. Henri Poincaré*, 1:543–567, 2000.

-
- [13] Gregory J Galloway. Null geometry and the einstein equations. In *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, pages 379–400. Springer, 2004.
- [14] Claus Gerhardt. H-surfaces in lorentzian manifolds. *Communications in mathematical physics*, 89(4):523–553, 1983.
- [15] Robert Geroch. Domain of dependence. *Journal of Mathematical Physics*, 11(2):437–449, 1970.
- [16] P Hajicek. Causality in non-hausdorff space-times. *Communications in Mathematical Physics*, 21(1):75–84, 1971.
- [17] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, London, 1973. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.
- [18] J Isenberg and V Moncrief. On spacetimes containing Killing vector fields with non-closed orbits. *Classical and Quantum Gravity*, 9(7):1683, 1992.
- [19] James Isenberg and Vincent Moncrief. Symmetries of cosmological Cauchy horizons with exceptional orbits. *Journal of mathematical physics*, 26(5):1024–1027, 1985.
- [20] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. New York, London, 1963.
- [21] Demir N Kupeli. On null submanifolds in spacetimes. *Geometriae Dedicata*, 23(1):33–51, 1987.
- [22] Eric Larsson. Smoothness of compact horizons. In *Annales Henri Poincaré*, volume 16, pages 2163–2214. Springer, 2015.
- [23] Eric Larsson. Smoothness of compact horizons. *Ann. Henri Poincaré*, 16(9):2163–2214, 2015.
- [24] M Lee John. Introduction to smooth manifolds. *Graduate Texts in Mathematics*, 218, 2003.
- [25] JG Miller, Martin D Kruskal, and Brendan B Godfrey. Taub-nut (newman, unti, tamburino) metric and incompatible extensions. *Physical Review D*, 4(10):2945, 1971.
- [26] E Minguzzi. Completeness of Cauchy horizon generators. *Journal of Mathematical Physics*, 55(8):082503, 2014.
- [27] E Minguzzi. Area theorem and smoothness of compact Cauchy horizons. *Communications in Mathematical Physics*, 339(1):57–98, 2015.
- [28] Ettore Minguzzi. Lorentzian causality theory. *Living reviews in relativity*, 22(1):3, 2019.
- [29] Charles W Misner. Taub-nut space as a counterexample to almost anything. *Relativity theory and astrophysics*, 1:160, 1967.

-
- [30] Vincent Moncrief. The space of (generalized) taub-nut spacetimes. *Journal of Geometry and Physics*, 1(1):107–130, 1984.
- [31] Vincent Moncrief and Douglas M Eardley. The global existence problem and cosmic censorship in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 13(9):887–892, 1981.
- [32] Vincent Moncrief and James Isenberg. Symmetries of cosmological Cauchy horizons. *Communications in Mathematical Physics*, 89(3):387–413, 1983.
- [33] Vincent Moncrief and James Isenberg. Symmetries of cosmological Cauchy horizons with non-closed orbits. *Communications in Mathematical Physics*, 374(1):145–186, 2020.
- [34] Ezra Newman, L Tamburino, and Theodore Unti. Empty-space generalization of the schwarzschild metric. *Journal of Mathematical Physics*, 4(7):915–923, 1963.
- [35] Barrett O’neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983.
- [36] Roger Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *NCimR*, 1:252, 1969.
- [37] Oliver Lindblad Petersen. Wave equations with initial data on compact Cauchy horizons. *arXiv preprint arXiv:1802.10057*, 2018.
- [38] Oliver Lindblad Petersen. Extension of Killing vector fields beyond compact Cauchy horizons. *arXiv:1903.09135*, 2019.
- [39] Oliver Lindblad Petersen and István Rácz. Symmetries of vacuum spacetimes with a compact Cauchy horizon of constant non-zero surface gravity. *arXiv:1809.02580*, 2018.
- [40] T Chruściel Piotr. On uniqueness in the large of solutions of einstein’s equations (strong cosmic censorship). *Proceedings of the Centre for mathematics and its applications, Australian National University*, 27, 1991.
- [41] Martín Reiris Ithurrealde and Ignacio Bustamante Bianchi. On the existence of Killing fields in smooth spacetimes with a compact Cauchy Horizon. *Classical and Quantum Gravity*, 2020.
- [42] Alan D Rendall. Compact null hypersurfaces and collapsing riemannian manifolds. *Mathematische Nachrichten*, 193(1):111–118, 1998.
- [43] Hans Ringström. *The Cauchy problem in general relativity*, volume 6. European Mathematical Society, 2009.
- [44] Peter Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15(5):401–487, 1983.
- [45] Norman Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton university press, 1999.
- [46] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.